

LEÇONS
SUR
APPROXIMATION DES FONCTIONS
D'UNE VARIABLE RÉELLE

PROFESSÉES A LA SORBONNE

PAR

C. DE LA VALLÉE POUSSIN

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN
MEMBRE CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1919

PRÉFACE.

Quand on se propose d'exprimer une fonction d'une variable réelle sous forme finie, on s'aperçoit rapidement que l'ordre de la meilleure approximation possible est lié à la continuité et aux propriétés différentielles de la fonction, ou, si la fonction est analytique, à la nature et à la situation des points singuliers. C'est l'étude de cette dépendance réciproque qui fait l'objet du présent Volume. J'ai largement profité des recherches faites récemment sur cette question, mais je ne les expose pas. Je traite le sujet en toute liberté et sous la forme synthétique qui m'a paru la meilleure.

Sauf l'addition du Chapitre IX et quelques retouches de détail par ailleurs, ce Livre est la reproduction fidèle des leçons que j'ai eu l'honneur de faire à la Sorbonne en mai et juin 1918. Aussi ai-je contracté une dette de reconnaissance envers MM. les professeurs de la Faculté des Sciences de Paris. Ils ont bien voulu m'accueillir et m'encourager aux jours sombres. L'hospitalité qu'ils m'ont donnée est un honneur dont je m'enorgueillis encore aux jours victorieux. Je leur adresse ici tous mes remerciements. Puisse ce modeste Volume, fait un peu sous leur inspiration, leur porter le témoignage de ma gratitude.

Je remercie, en particulier, M. E. Borel. C'est la deuxième fois qu'il accepte une monographie signée de mon nom dans

la Collection remarquable qu'il dirige. Je ne pouvais souhaiter de recommandation plus flatteuse.

Je remercie enfin bien sincèrement la maison Gauthier-Villars et C^{ie}, qui, malgré les sérieuses difficultés de la présente, a entrepris la publication de cet Ouvrage et donné tous les soins.

C. DE LA VALLEE POUSSIEU.

Louvain, juillet 1919.

APPROXIMATION DES FONCTIONS

INTRODUCTION.

THÉORÈMES DE WEIERSTRASS. GÉNÉRALITÉS.

1. Problème de l'approximation. — La question qui va nous occuper dans ces *Leçons* est la suivante : soit $f(x)$ une fonction continue d'une variable réelle x ; il s'agit de l'exprimer sous forme finie avec une approximation plus ou moins grande, mais notre étude ne portera que sur deux modes de représentation approchée : *la représentation par polynômes*, et alors la fonction se fait dans un intervalle (a, b) ; *la représentation trigonométrique*, et alors la fonction $f(x)$ est supposée périodique de période 2π et la représentation s'étend à toutes les valeurs réelles de x .

Cette représentation trigonométrique est donnée par une expression d'un certain ordre fini n , c'est-à-dire par une somme limitée de la forme

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \\ & + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx, \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, par un polynôme de degré n en $\sin x$ et $\cos x$. On sait, en effet, que les expressions

$$\cos kx, \quad \frac{\sin(k+1)x}{\sin x}$$

sont, pour k entier, des polynômes de degré k en $\cos x$. On s'en assure d'ailleurs immédiatement en considérant les formules de récurrence

$$\begin{aligned} \cos kx - \cos(k-2)x &= 2 \cos(k-1)x \cos x, \\ \frac{\sin(k+1)x - \sin(k-1)x}{\sin x} &= 2 \cos kx. \end{aligned}$$

En particulier, si l'expression trigonométrique d'une fonction est une fonction paire, elle se réduit, les sinus disparaissant, à un polynôme de degré n en $\cos x$.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) . Nous pouvons nous donner un polynôme de degré n , P_n , qui approxime $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) . Nous dirons alors que la différence, $f(x) - P_n(x)$, est positive, négative,

$$f(x) - P_n(x),$$

est l'écart du polynôme P_n au point x et que le maximum de la valeur absolue de cet écart est l'approximation de $f(x)$ par P_n . Le polynôme P_n est donc d'autant meilleur que l'écart est petit. Si nous considérons une fonction périodique $f(x)$ et sa représentation trigonométrique approchée de cette fonction, nous dirons l'approximation d'une manière analogue, sauf que nous envisagerions toutes les valeurs réelles de x ; mais il suffit de cela de faire varier x dans une période, c'est-à-dire dans l'intervalle d'amplitude 2π .

Le problème de l'approximation consiste à former une fonction de l'un des deux types précédents telle que l'approximation soit inférieure à un nombre positif donné d'avance, aussi petit qu'on veut. Ce problème est possible dans les deux cas. Nous avons deux théorèmes d'existence, tous deux dus à Weierstrass et qui ont été le point de départ de la théorie qui va nous occuper. Voici les énoncés de ces théorèmes :

2. Théorèmes de Weierstrass ⁽¹⁾. I. *Toute fonction continue dans un intervalle (a, b) peut être développée en série uniformément convergente de polynômes dans cet intervalle.*

II. *Toute fonction continue de période 2π peut être développée en série uniformément convergente d'expressions trigonométriques finies.*

⁽¹⁾ WEIERSTRASS, *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter Functionen einer reellen Veränderlichen* (Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Acad. der Wiss., 1885).

Dans ces deux énoncés, il s'agit de développement en série et non d'approximation sous forme finie, mais les deux problèmes sont les mêmes. En effet, supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'approximation par polynômes. Si l'on connaît un développement de $f(x)$ en série uniformément convergente de polynômes, on en déduit un polynome aussi approché qu'on voudra de cette fonction, en sommant un nombre suffisant de termes de cette série. Réciproquement, si l'on a construit une suite de polynômes $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ fournissant une suite d'approximations tendant vers zéro, on obtient l'expression de $f(x)$ en série uniformément convergente :

$$f(x) = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \dots$$

Les théorèmes I et II se ramènent l'un à l'autre, comme nous le verrons. On en a donné aussi un grand nombre de démonstrations directes, dont nous ne ferons pas ici l'historique. Mais nous allons exposer maintenant la démonstration la plus élémentaire que l'on ait donnée jusqu'à présent du théorème I. Elle est due à M. Lebesgue ⁽¹⁾.

3. Démonstration de M. H. Lebesgue. — La démonstration que M. H. Lebesgue a donnée du théorème I présente un caractère distinctif. Elle ramène la démonstration du théorème pour $f(x)$ quelconque, à la démonstration du théorème pour la fonction particulière $|x|$. Voici comment se fait cette réduction :

M. Lebesgue observe que l'on peut approcher autant que l'on veut d'une courbe continue à l'aide d'une ligne polygonale. L'approximation d'une fonction continue se ramène donc à celle de l'ordonnée d'une telle ligne. Il reste à ramener l'approximation d'une telle ordonnée à celle de $|x|$.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ les sommets d'une ligne polygonale dont il faut représenter approximativement l'ordonnée entre les abscisses x_1 et x_n . Remarquons que la fonction

$$\varphi_k(x) = |x - x_k| + (x - x_k)$$

(1) Sur l'approximation des fonctions (*Bull. de la Soc. math.*, 2^e série).

est nulle pour $x = x_k$ et égale à $2(x - x_k)$ pour $x = x_k$.

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x),$$

où a_0, a_1, \dots, a_{n-1} sont n constantes à déterminer. Comme $F(x)$ varie linéairement entre deux abscisses consécutives, il suffit, pour l'identifier à la ligne polygonale, il suffit de faire coïncider les n sommets, ou de poser les n conditions

$$F(x_i) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{i-1} a_k (x_i - x_k) \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ceci constitue un système récurrent qui détermine de proche en proche a_0, a_1, \dots, a_{n-1} .

Ainsi $F(x)$ est l'ordonnée de la ligne polygonale. L'ordonnée de $F(x)$ dépend de celle de $\varphi_k(x)$, donc de celle de $|x|$, donc finalement de celle de $|x|$ dans un certain intervalle.

Il existe bien des méthodes d'approximation de $|x|$ par des polynomes, mais on se borne au seul théorème d'existence de Weierstrass, la méthode qui suffit et c'est encore celle de M. Lebesgue.

Soit donc à représenter $|x|$ en série uniformément convergente de polynomes dans un intervalle (a, b) . Le problème est plus facile que si a et b sont de signes contraires, et il suffit évidemment de considérer un intervalle symétrique, par exemple $(-b, b)$. On pose alors $x = bt$ (b positif), il suffit de représenter $|t|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$.

On a, par la formule du binôme,

$$1 - \sqrt{1 - z} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2,4}z^2 - \frac{1,3}{2,4,6}z^3 + \dots,$$

et cette série converge uniformément entre -1 et $+1$. On remplace z par $1 - t^2$; nous obtenons, dans l'intervalle $(-1, +1)$, le développement cherché

$$|t| = 1 - \frac{1}{2}(1 - t^2) + \frac{1}{2,4}(1 - t^2)^2 - \dots$$

Cette démonstration ne va pas au delà du théorème d'existence.

éclatante par sa simplicité, mais elle ne fournit une approximation médiocre. Elle se prêterait mal à la recherche de séries aussi convergentes que possible, recherche qui occupe les principaux Chapitres de ces *Leçons*.

Démonstration du théorème II. — Un grand nombre de démonstrations du théorème II se fondent sur les propriétés de la série de Fourier. Nous rencontrerons, au Chapitre II, une démonstration de ce théorème. Il est cependant utile d'établir le théorème II indépendamment de cette théorie, et c'est ce que nous avons fait ⁽¹⁾ en ramenant le théorème II au théorème de Weierstrass ⁽²⁾ qui s'inspire des mêmes idées que la démonstration de Lebesgue, mais qui en diffère par les artifices employés.

Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π , dont il faut faire l'approximation trigonométrique. Considérons les deux fonctions

$$f(x) + f(-x), \quad [f(x) - f(-x)] \sin x.$$

Ces deux fonctions, toutes deux paires de période 2π , sont donc des fonctions de $\cos x$ et nous pouvons les désigner par $\varphi(u)$ et $\psi(u)$. Je dis que l'approximation trigonométrique de $f(x)$ est à celle par polynômes de $\varphi(u)$, de $\psi(u)$ et de $\sin x$ une approximation analogue.

Soient $P(u)$ et $Q(u)$ deux polynômes tels que l'on ait

$$\varphi(u) = P(u), \quad \psi(u) = Q(u);$$

alors, pour la même approximation,

$$[f(x) + f(-x)] \sin^2 x = P(\cos x) \sin^2 x,$$

$$[f(x) - f(-x)] \sin^2 x = Q(\cos x) \sin x;$$

l'approximation

$$f(x) \sin^2 x = P(\cos x) \sin^2 x + Q(\cos x) \sin x.$$

⁽¹⁾ POUSSIN, *L'approximation des fonctions d'une variable réelle* (Paris, Gauthier-Villars, 1918), 20^e année, n° 1, 1918).

Recommençons le même calcul avec la fonction $f(x)$ de $f(x)$. Les polynômes $P(u)$ et $Q(u)$ sont remplacés par $R(u)$ et $S(u)$; d'où la relation approchée

$$2f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 x = R(\cos x) \sin^2 x - S(\cos x) \sin^2 x$$

et, en changeant x en $x - \frac{\pi}{2}$,

$$(2) \quad 2f(x) \cos^2 x = R(\sin x) \cos^2 x - S(\sin x) \cos^2 x$$

Ajoutons maintenant les relations approchées (1) et (2) membre à membre; nous obtenons l'expression trigonométrique approchée de $f(x)$.

5. Réduction de l'approximation par polynômes à l'approximation trigonométrique.

Nous venons de rappeler, d'après M. Lebesgue, l'approximation trigonométrique à l'approximation par polynômes. On peut aussi faire l'inverse: l'approximation par polynômes à une approximation trigonométrique. C'est ce procédé inverse que nous aurons surtout en vue dans ces Leçons. A cet effet, nous ferons grand usage d'un procédé extrêmement simple, dont M. S. Bernstein surtout a souligné les avantages⁽¹⁾ et dont il importe de dire un mot dès maintenant.

Soit à représenter par polynômes une fonction continue sur un intervalle donné. Tout intervalle (a, b) se ramène à $(-1, +1)$ par la substitution linéaire

$$x = a \frac{1+t}{2} + b \frac{1-t}{2}.$$

Supposons qu'elle transforme $f(x)$ en $\varphi(t)$; la restriction de $\varphi(t)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ se transforme en $f(x)$ dans (a, b) par la substitution linéaire inverse. Les substitutions transforment un polynôme en un autre et n'ont pas de degré. Il suffit donc bien de considérer la représentation de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$. Posons, avec

$$x = \cos \varphi;$$

⁽¹⁾ Sur la meilleure approximation des fonctions continues, par la classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique.

cette substitution transforme $f(x)$ en $f(\cos \varphi)$ qui est une fonction paire de période 2π . Je dis que *l'approximation de $f(x)$ par des polynômes en x et celle de $f(\cos \varphi)$ par des expressions trigonométriques en φ sont deux problèmes complètement équivalents*.

Supposons, en effet, que nous ayons, avec une certaine approximation, la représentation trigonométrique

$$f(\cos \varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi,$$

ne contenant que des cosinus (puisque la fonction est paire), et remarquons que $\cos k\varphi$ est un polynôme de degré k en $\cos \varphi$,

$$\cos k\varphi = P_k(\cos \varphi);$$

nous avons, avec la même approximation, la représentation par polynôme que nous cherchons

$$f(x) = a_0 + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x).$$

Les polynômes $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... sont ce que M. Bernstein appelle des *polynômes trigonométriques*. Ils ont été considérés bien avant lui par le grand mathématicien russe Tchebycheff, qui en a signalé des propriétés remarquables, et nous aurons l'occasion d'y revenir dans la suite.

Réciproquement, une représentation de $f(x)$ par un polynôme en x se transforme, en posant $x = \cos \varphi$, dans une représentation trigonométrique de $f(\cos \varphi)$.

6. **Module de continuité.** — Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) . Considérons deux points x_1, x_2 de cet intervalle et formons la différence absolue

$$|f(x_2) - f(x_1)|.$$

Cette différence admet un maximum pour l'ensemble des points de l'intervalle (a, b) qui satisfont à la condition

$$|x_2 - x_1| \leq \delta,$$

où δ est un nombre positif donné. Ce maximum est une fonction continue de δ , que nous désignerons par $\omega(\delta)$ et que nous appellerons *module de continuité* de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) . On

pourrait préférer à cette dénomination celle de *module* *tion*, plus naturelle à certains égards ⁽¹⁾; mais nous choisissons la première, parce qu'elle attire mieux l'attention sur l'importance de la notion qu'elle exprime.

D'après sa définition, le module de continuité est une fonction continue et non décroissante de δ , qui tend vers zéro avec δ . C'est la rapidité plus ou moins grande de cette convergence quand δ tend vers zéro qui nous intéressera plus particulièrement dans la suite.

Quand $f(x)$ est périodique, le module de continuité est périodique de la même façon, mais sans restriction d'intervalle. Dans ces conditions, $\omega(\delta)$ atteint évidemment son maximum pour δ égale ou inférieure à l'amplitude de la demi-période; et ce maximum est $\omega(\pi)$.

Le module de continuité possède quelques propriétés presque immédiates :

1° *Quel que soit λ entier, on a*

$$\omega(\lambda\delta) \leq \lambda\omega(\delta).$$

En effet, cette inégalité s'obtient en remplaçant chaque terme de la somme par la borne supérieure de son module, sous la condition que λ est entier, dans l'égalité

$$f(x + \lambda h) - f(x) = \sum_{k=0}^{\lambda-1} [f(x + kh + h) - f(x + kh)].$$

2° *Quel que soit λ positif (entier ou non), on a*

$$\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta).$$

Soit $\lambda + \varepsilon$ l'entier supérieur à λ (supposé non entier)

$$\omega(\lambda\delta) \leq \omega[(\lambda + \varepsilon)\delta] \leq (\lambda + \varepsilon)\omega(\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta).$$

3° *Si $\omega(\delta)$ s'annule pour une valeur non nulle δ_1 , se réduit à une constante.*

En effet, $\omega(\delta)$ s'annule pour $\delta \leq \delta_1$, auquel cas, $f(x)$ est constant dans tout intervalle $< \delta_1$, donc aussi dans tout intervalle

(1) Cette observation m'a été faite par M. Lalesco.

7. Condition de Lipschitz. — On dit qu'une fonction est *lipschitzienne* ou vérifie une *condition de Lipschitz*, si l'on peut assigner une constante M telle que l'on ait, quels que soient x_1 et x_2 ,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|.$$

Si la fonction $f(x)$ est lipschitzienne, elle est continue et son module de continuité satisfait à la condition

$$\omega(\delta) = M\delta,$$

complètement équivalente à la précédente.

Cette condition est celle de Lipschitz proprement dite. Plus généralement, on dit qu'une fonction $f(x)$ vérifie une condition de Lipschitz d'ordre α ou d'exposant α ($0 < \alpha \leq 1$), si l'on a

$$\omega(\delta) = M\delta^\alpha.$$

Ainsi la condition de Lipschitz proprement dite est celle d'ordre 1.

Il n'y a pas lieu de considérer de condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 1$. Une fonction qui la posséderait se réduirait à une constante. On aurait, en effet, par la propriété 1^o du numéro précédent, quel que soit λ entier,

$$\omega(\delta) = \omega\left(\lambda \frac{\delta}{\lambda}\right) = \lambda \omega\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) = \lambda M \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^\alpha;$$

et, en faisant tendre λ vers l'infini,

$$\omega(\delta) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{M\delta^\alpha}{\lambda^{\alpha-1}} = 0.$$



CHAPITRE I.

APPROXIMATION PAR LES SÉRIES DE FOURIER

8. Séries et constantes de Fourier. Propriété de n
les définit. — Soit $f(x)$ une fonction bornée et in
 période 2π . Considérons la suite trigonométrique fin

$$S_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Cette suite s'appelle la *somme de Fourier d'ordre*
 à $f(x)$, si les coefficients a_k et b_k sont déterminés par
 de minimiser l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n]^2 dx.$$

Cette intégrale est une expression quadratique positif
 admettant nécessairement un minimum. Pour le réaliser
 annuler les dérivées partielles en a et en b , c'est à dire

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n] \cos kx dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n] \sin kx dx = 0,$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

d'où, sans difficulté,

$$(1) \quad \begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, & b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \\ (k = 0, 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Il est important de remarquer que, par suite de la
 l'intervalle d'intégration peut être remplacé par toute
 même amplitude 2π , sans changer la valeur de ces intégrales.

Les constantes a_k et b_k déterminées par les formules (1) sont les *constantes de Fourier* de $f(x)$. La série illimitée

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

considérée au point de vue purement formel, qu'elle soit convergente ou non, est la *série de Fourier* de $f(x)$. La somme S_n est celle des $n+1$ premiers termes de cette série.

L'expression des constantes de Fourier, sous forme d'intégrales définies par les formules (1), conduit immédiatement à quelques conséquences fondamentales :

1° *Si le module de $f(x)$ ne dépasse pas M , celui des constantes de Fourier ne dépasse pas $2M$.*

2° *Les constantes de Fourier de $f + \varphi$ sont les sommes des constantes de Fourier du même ordre de f et de φ . La série de Fourier de $f + \varphi$ est la somme terme à terme des séries de f et de φ .*

9. **Conséquences du théorème de Weierstrass.** — Le théorème II de Weierstrass (n° 2) entraîne d'autres propriétés également fondamentales des constantes et des sommes de Fourier. Indiquons-les :

1° *Si $f(x)$ de période 2π est continue, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_n|^2 dx = 0.$$

En effet, d'après Weierstrass, on peut définir une expression trigonométrique T_n , d'ordre n et donnant une approximation ε_n qui tend vers zéro avec $1/n$. Donc, puisque S_n minimise l'intégrale, on a

$$\int_0^{2\pi} (f - S_n)^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (f - T_n)^2 dx \leq \int_0^{2\pi} \varepsilon_n^2 dx.$$

Le dernier membre de ces inégalités tend vers zéro avec $1/n$, donc *a fortiori* le premier.

2° Si $f(x)$ est continue, la série positive

$$\sum_0^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

est convergente et a pour somme

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx.$$

En effet, faisons la décomposition

$$\int_0^{2\pi} [f - S_n]^2 dx = \int_0^{2\pi} f^2 dx - 2 \int_0^{2\pi} f S_n dx + \int_0^{2\pi} S_n^2 dx$$

On a, par les formules (1),

$$\int_0^{2\pi} f S_n dx = \sum_0^n \int_0^{2\pi} f (a_k \cos kx + b_k \sin kx) dx = \pi \sum_0^n$$

D'autre part, on a, en développant S_n ,

$$\int_0^{2\pi} S_n^2 dx = \sum_0^n \int_0^{2\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)^2 dx = \pi \sum_0^n (a_k^2 + b_k^2)$$

Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} (f - S_n)^2 dx = \int_0^{2\pi} f^2 dx - \pi \sum_0^n (a_k^2 + b_k^2)$$

Quand n tend vers l'infini, le premier membre tend (par 1°), donc le second membre aussi, ce qui prouve la proposition.

On remarquera que l'on tire maintenant de la dernière

$$\int_0^{2\pi} (f - S_n)^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

3° Si les constantes de Fourier d'une fonction sont toutes nulles, la fonction est identiquement nulle.

En effet, on a, par la propriété 2^o,

$$\int_0^{2\pi} f^2 dx = 0,$$

ce qui n'a lieu pour f continue que si $f \equiv 0$.

Cette proposition entraîne immédiatement la suivante :

4^o *Deux fonctions continues qui ont les mêmes constantes de Fourier sont identiques.*

5^o *Si la série de Fourier d'une fonction continue f est uniformément convergente dans la période, donc, en particulier, si les séries positives $\sum |a_k|$ et $\sum |b_k|$ convergent, la série de Fourier a pour somme f .*

En effet, la somme de la série est une fonction continue et périodique φ . Comme la série est intégrable terme à terme, les constantes de Fourier de φ [qui se calculent par les formules (1)] sont les mêmes que celles de f ; donc $f \equiv \varphi$ (par 4^o).

6^o *Si une expression trigonométrique T_n d'ordre n fournit une approximation φ_n , on a nécessairement*

$$\varphi_n \geq \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)},$$

ce qui fournit une première borne inférieure de la meilleure approximation possible (1).

En effet, puisque S_n minimise l'intégrale, on a (2^o)

$$\int_0^{2\pi} (f - T_n)^2 dx = \int_0^{2\pi} (f - S_n)^2 dx = \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2);$$

et, puisque T_n donne l'approximation φ_n ,

$$\int_0^{2\pi} (f - T_n)^2 dx \geq \int_0^{2\pi} \varphi_n^2 dx = 2\pi \varphi_n^2.$$

(1) S. BERNSTEIN, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (n° 52) (*Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. IV, 1912). Nous avons rétabli le facteur $\frac{1}{2}$ qui manque ici sous le radical.

La comparaison des deux bornes ainsi obtenues justifie le même énoncé.

10. Dérivation des séries de Fourier. — Si f admet une dérivée d'ordre r bornée et intégrable, la série de Fourier de $f^{(r)}$ s'obtient en dérivant r fois terme de f .

Il suffit de faire la preuve pour le premier ordre, puis de conclure que la série dérivée

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \{ a_k \sin kx + b_k \cos kx \}$$

est la série de Fourier de f' , donc de vérifier que ses coefficients sont bien les constantes de Fourier A_n , Λ_k et B_k de f' .

On a, en intégrant par parties, et à cause de la péri-

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f' dx = \frac{1}{\pi} [f(x)]_0^{2\pi} = f(0) - f(0) = 0,$$

$$\Lambda_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f' \cos kx dx = \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} f \sin kx dx$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f' \sin kx dx = \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cos kx dx$$

La vérification est donc faite.

11. Théorème. — Soit $\varphi(x)$ une fonction continue sur un intervalle fini (a, b) ; si x tend vers l'infini d'une façon quelconque, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x \varphi(t) \cos tx dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x \varphi(t) \sin tx dt = 0$$

Il suffira de considérer la première intégrale. Posons

$$I = \int_a^x \varphi(t) \cos t dt$$

Substituons dans cette intégrale $x + \frac{1}{t}$ à t et ajoutons

la précédente; il vient

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) \cos \lambda x \, dx &= \int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^{b - \frac{\pi}{\lambda}} \varphi\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos \lambda x \, dx \\ &= \int_a^{b - \frac{\pi}{\lambda}} \left[\varphi(x) - \varphi\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right] \cos \lambda x \, dx \\ &+ \int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^a \varphi(x) \cos \lambda x \, dx + \int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^a \varphi\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos \lambda x \, dx. \end{aligned}$$

Les trois intégrales tend vers zéro quand λ tend vers l'infini, première avec la fonction à intégrer et les deux dernières à cause de l'amplitude de l'intervalle d'intégration.

Le théorème précédent subsiste si $\varphi(x)$ admet un nombre fini de discontinuités, même sans supposer $\varphi(x)$ continue, moyennant l'existence de l'intégrale

$$\int_a^b |\varphi| \, dx.$$

Supposons que φ n'est discontinue qu'aux limites a et b , et que φ se décompose en plusieurs autres vérifiant cette condition. Quelque petit que soit ε positif donné, on peut se proposer de trouver un η positif assez petit pour que les deux intégrales :

$$\int_a^b |\varphi| \, dx, \quad \int_{a+\eta}^{b-\eta} |\varphi| \, dx$$

soient toutes deux inférieures à ε , auquel cas les deux suivantes :

$$\int_a^b \varphi \cos \lambda x \, dx, \quad \int_{a+\eta}^{b-\eta} \varphi \cos \lambda x \, dx$$

seront toutes deux inférieures à ε , quel que soit λ . Il suffit donc de démontrer que la seconde, dans laquelle φ est continue, ce qui résulte du théorème précédent (1).

Grandeur des constantes de Fourier. — 1^o Si la

(1) On a démontré que le théorème subsiste sous la seule condition que φ soit bornée. (Leçons sur les séries trigonométriques, p. 61).

fonction $f(x)$ de période 2π est continue et admet une limite de continuité $\omega(\delta)$, ses constantes de Fourier a_m convergent vers zéro pour $m \rightarrow \infty$ (en vertu du théorème 1) et l'on a

$$|a_m| = \omega\left(\frac{\pi}{m}\right), \quad |b_m| = \omega\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

Il suffira de faire la démonstration pour a_m .

Recommençons le calcul de la démonstration précédente. Nous aurons, par le changement de x en $x = \frac{x'}{m}$ et sans modifier les limites (à cause de la périodicité),

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(x' - \frac{x'}{m}\right) \cos mx' \, dx'$$

puis, en faisant la demi-somme,

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x) + f\left(x - \frac{x}{m}\right) \right] \cos mx \, dx$$

Donc, par le théorème de la moyenne,

$$|a_m| \leq \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{m}\right) \int_0^{2\pi} dx = \omega\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

2° Si $f(x)$ de période 2π possède une dérivée continue, celle-ci admette le module de continuité $\omega_r(\delta)$, on a

$$|a_m| \leq \frac{1}{m} \omega_r\left(\frac{\pi}{m}\right), \quad |b_m| \leq \frac{1}{m} \omega_r\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

En effet, les constantes de Fourier de $f'(x)$ sont, à un signe près (n° 10), $m^2 a_m$ et $m^2 b_m$. Or elles sont $\leq \omega_r\left(\frac{\pi}{m}\right)$, en vertu de la proposition 1, d'où la conclusion actuelle.

Voici déjà quelques applications très simples de ces

Si la série positive $\sum (|a_m| + |b_m|)$ converge, la série $\sum (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$ converge uniformément vers $f(x)$ (n° 9) et l'approximation par la somme de Fourier S_n est inférieure à

$$\sum_{n+1}^{\infty} (|a_m| + |b_m|)$$

admet une dérivée $f'(x)$ satisfaisant à une condition de l'ordre α , on a (par 1^o)

$$\sum (|a_m| + |b_m|) \leq 2 \sum \frac{1}{m} \omega\left(\frac{\pi}{m}\right) < M \sum \frac{1}{m^{1+\alpha}},$$

une constante convenable. Cette série est convergente, la série de Fourier converge vers $f(x)$. Ce critérium rentre dans les plus généraux que nous rencontrerons plus loin.

Si $f(x)$ est indéfiniment dérivable, on a (par 2^o), quel que soit r ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < M_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+1}} < \frac{M_r}{r n^r},$$

une constante par rapport à n . Donc, quand n tend vers l'infini, l'approximation fournie par la somme S_n de Fourier est petite d'ordre supérieur à toute puissance de $1/n$.

Remarque sur la série de Fourier et de la série conjuguée. — Soit $f(x)$ une fonction bornée et de période 2π . En même temps que la série de Fourier

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

on peut considérer celle qui s'en déduit par la permutation des coefficients a, b et le changement de signe de x . Cette nouvelle série que l'on appelle la *série conjuguée* de celle de Fourier, est la suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

Les ordres n de ces deux séries sont respectivement :

$$S_n = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$S'_n = \sum_{k=1}^n (b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

Par la substitution des valeurs (1) des constantes de sommes se transforment dans les intégrales

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_1^n \cos kt - r \right| f(t) dt$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_1^n \sin kt - r \right| f(t) dt$$

Changeons t en $t + x$, sans toucher aux limites (à cause de la périodicité), il vient

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_1^n \cos kt \right| f(t - x) dt$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_1^n \sin kt \right| f(t - x) dt$$

L'intervalle d'intégration peut être remplacé par un même amplitude 2π , en particulier par $-\pi$ à $+\pi$; les intégrales entre $-\pi$ et zéro se ramènent à des intégrales entre zéro et $+\pi$, et $+\pi$, par le changement de t en $-\pi - t$, et il vient ainsi

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_1^n \cos kt \right| [f(t - x) + f(t - x - \pi)] dt$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \sum_1^n \sin kt \right| [f(t - x) - f(t - x - \pi)] dt$$

Si l'on sépare le réel et l'imaginaire dans la relation

$$\frac{1}{2} + \sum_1^n e^{kht} = \frac{e^{n+1/2} - 1}{e^{1/2} - 1} e^{(n+1/2)t} = \frac{e^{(n+1/2)t} - e^{-(n+1/2)t}}{e^{1/2} - e^{-1/2}} = \frac{1}{2} \frac{e^{(n+1/2)t} + e^{-(n+1/2)t}}{e^{1/2} - e^{-1/2}} + i \frac{e^{(n+1/2)t} - e^{-(n+1/2)t}}{e^{1/2} - e^{-1/2}}$$

on obtient

Il vient, par la substitution de ces valeurs,

$$(4) \quad S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt,$$

$$(5) \quad S'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \frac{\cos \frac{1}{2}t - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

La convergence de la série de Fourier et de sa conjuguée sont liées à la convergence des intégrales précédentes pour $n = \infty$. Nous renverrons aux Ouvrages classiques pour l'étude des critères de convergence les plus généraux. Nous n'indiquerons ici que le plus important, qui est le suivant :

14. Critérium de convergence des séries précédentes. — Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π . La série de Fourier de $f(x)$ et sa conjuguée seront toutes les deux convergentes au point x , si, ε positif étant donné, l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\varepsilon \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt$$

a une valeur finie. Dans ce cas, la série de Fourier a pour somme $f(x)$ et sa conjuguée a pour somme l'intégrale (existante par hypothèse)

$$(6) \quad f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \cot \frac{1}{2}t dt.$$

En intégrant les deux membres de la formule (2) au numéro précédent, il vient

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt = 1;$$

donc, en multipliant cette relation par $f(x)$, puis en retranchant l'équation (4) du résultat, il vient

$$f(x) - S_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [2f(x) - f(x+t) - f(x-t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

Pour établir la première partie du théorème, c'est-à-dire que la série de Fourier converge vers $f(x)$, il faut montrer que l'intégrale tend vers zéro quand n tend vers l'infini. C'est la conséquence du théorème général du n° 11, pour la fonction $f(x)$.

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \right| dt$$

existe. Reste seulement à démontrer cette existence.

A cet effet, on observe que l'intégrale

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right| dt$$

existe par hypothèse. Or on n'altère pas cette condition en changeant l'intégration de 0 à π (puisque f est continue) et en multipliant la fonction à intégrer par la fonction continue

$$\frac{t}{2 \sin \frac{1}{2}t}.$$

On retrouve alors l'intégrale dont il faut prouver l'existence. Passons à la seconde partie du théorème.

L'existence de l'intégrale (6) se justifie par un raisonnement tout pareil à celui que nous venons de faire. En différentiant l'équation (5) dé (6), on trouve

$$f_1(x) = S'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt.$$

Pour prouver que la série conjuguée converge vers $f_1(x)$, il faut prouver que cette intégrale tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Mais c'est encore une fois la conséquence du n° 11, parce que l'intégrale

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \right| dt$$

existe, par la condition supposée dans l'énoncé du théorème.

Il y a lieu d'observer que ladite condition a lieu partout où $f(x)$ a une dérivée finie. Elle a lieu partout, si $f(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz d'un ordre α si petit qu'il

s pouvons maintenant établir les théorèmes concernant l'approximation par les séries de Fourier.

Théorème I. — *On peut assigner a priori deux nombres A et B jouissant de la propriété suivante : Si $f(x)$ est une fonction périodique et intégrable de module $< M$, les deux sommes S_n et S'_n sont toutes deux de module inférieur à*

$$M(A \log n + B),$$

où n est un entier positif.

Il suffit de démontrer que la condition peut se réaliser pour une des deux sommes.

Commençons par S_n . On a, par la formule (4),

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq M \int_0^\pi \left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \right| dt = M \int_0^\pi \left| \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{t} \right| dt \\ &= M \int_0^{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = M \int_0^1 dt + M \int_1^{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi} \frac{dt}{t} \\ &= M \left[1 + \log \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right] \leq M(1 + \log n + \log 2\pi). \end{aligned}$$

La première parenthèse est de la forme $A \log n + B$.

Passons à S'_n . On a, par la formule (5),

$$\begin{aligned} |S'_n| &\leq M \int_0^\pi \left| \frac{\cos \frac{1}{2} t - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \right| dt \\ &= 2M \int_0^\pi \left| \frac{\sin \frac{n}{2} t \sin \frac{n+1}{2} t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \right| dt \leq 2M \int_0^\pi \left| \frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \right| dt. \end{aligned}$$

Cette intégrale est la même que l'autre, sauf que n est remplacé par $n+1$ et qu'il y a un facteur 2 en plus. Il suffira de doubler les valeurs de A et de B trouvées dans les théorèmes précédentes.

Il est facile d'abaisser les valeurs de A et de B fournies par les théorèmes précédents, mais cela n'a pas actuellement d'intérêt.

Théorème II. — *Supposons $f(x)$ périodique et intégrable*

et désignons par R_n la différence $f(x) - S_n$. (C'est a priori deux nombres fixes A et B tels que $\text{module} < M$, on ait, quel que soit n ,

$$|R_n| \leq M(A \log n + B).$$

Ce théorème n'est pas distinct du précédent. On a

$$|R_n| \leq |f| + |S_n| \leq M + |S_n|.$$

Il suffit donc d'ajouter une unité à la valeur de M ci-dessus.

M. Lebesgue ⁽¹⁾ a déduit du théorème précédent une conséquence de la plus haute importance. C'est une règle qui donne une borne inférieure de la meilleure approximation d'ordre n quand on connaît le développement de la fonction à représenter. Voici cette règle :

17. Règle de M. Lebesgue. Si l'approximation d'ordre n d'une suite de Fourier d'ordre n est égale à $\frac{2}{\pi} \log n$, l'approximation trigonométrique du même ordre est égale à

$$\frac{2}{\pi} \log n + B,$$

où A et B sont les deux nombres assignés dans le théorème précédent.

Soient S_n la somme de Fourier donnant l'approximation d'ordre n et T_n une seconde expression d'ordre n donnant l'approximation d'ordre n . Considérons la décomposition

$$f = (f - T_n) + T_n.$$

Soit Σ_n la somme de Fourier de $f - T_n$, nous avons

$$S_n = \Sigma_n + T_n,$$

$$|f - S_n| = |(f - T_n) - \Sigma_n|.$$

Comme Σ_n est la somme de Fourier de $f - T_n$,

(1) Sur les intégrales singulières (Ann. Fac. des Sc. de Toulouse).

(2) Voir la première au n° 9 (6°).

de $\leq \varphi_n$, nous avons, par le théorème précédent,

$$|f - T_n| \leq \Sigma_n \leq \varphi_n (A \log n + B);$$

comme d'autre part $|f - S_n|$ atteint la valeur $\varphi(n)$, nous en concluons

$$\varphi(n) \leq \varphi_n (A \log n + B).$$

Il résulte là la borne inférieure assignée à φ_n .

Théorème III. — On peut assigner a priori deux nombres A et B jouissant de la propriété suivante : Si $f(x)$ de module 2π admet une dérivée d'ordre r intégrable et de module $\leq M_r$, on a

$$|R_n| = |f(x) - S_n| \leq (A \log n + B) \frac{M_r}{n^r}.$$

Supposons d'abord r pair et soit $r = 2q$.

La série de Fourier de $f^{(r)}(x)$ s'obtient en dérivant $r = 2q$ fois celle de $f(x)$, à savoir

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k, \quad \Lambda_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

elle converge par le critérium du n° 14. La série dérivée (qui peut être convergente ou non) sera

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k, \quad B_k = (-1)^q k^r \Lambda_k.$$

Donc, en remplaçant Λ_k par sa valeur tirée de cette dernière formule, nous obtenons

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k = (-1)^q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k^r}.$$

Soit τ_k la somme d'ordre k de la série de Fourier de $f^{(r)}(x)$, de sorte que

$$B_k = \tau_k - \tau_{k+1};$$

il vient

$$(-1)^q R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{k^r} - \frac{\tau_{k+1}}{(k+1)^r} = \frac{\tau_n}{(n+1)^r} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) \tau_k.$$

Mais, en vertu du théorème I, on a

$$|\sigma_k| \leq M_p (\Lambda \log k + B);$$

il vient donc

$$\begin{aligned} \frac{|R_n|}{M_p} &\leq \frac{\Lambda \log n + B}{(n+1)^p} + \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) (\Lambda \log k + B) \\ &= \frac{\Lambda \log n + 2B}{(n+1)^p} + \Lambda \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^r} - \frac{1}{(k+1)^r} \right) \log k. \end{aligned}$$

La dernière somme (qui est multipliée par Λ) peut se représenter sous la forme

$$\begin{aligned} &\frac{\log(n+1)}{(n+1)^p} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^r} \log \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{\log(n+1)}{(n+1)^p} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^r} \cdot \frac{\log(n+1) - 1}{(n+1)^p} + \frac{\log n + 1}{n^r} \end{aligned}$$

Il vient donc *a fortiori*

$$|R_n| \leq \frac{\Lambda \log n + (\Lambda + B)}{n^p} + M_p.$$

C'est la relation à démontrer ; Λ et $B + 1$ sont deux nombres fixes que l'on peut désigner de nouveau par Λ et B .

Supposons, en second lieu, r impair et de la forme $2q + 1$ (q peut être nul).

La série de Fourier de $f^{(r)}(x)$, qui s'obtient par $2q + 1$ dérivations, sera, dans ce cas-ci,

$$\sum_1^{\infty} B_k = B_k (-1)^q (a \sin kx + b \cos kx) k^r.$$

Donc la série conjuguée de la série de Fourier de $f^{(r)}(x)$

$$\sum_1^{\infty} B'_k = B_k (-1)^q (a \cos kx + b \sin kx) k^r.$$

En remplaçant A_k par sa valeur tirée de cette dernière formule nous obtenons

$$R_n = (-1)^q \sum_1^{\infty} \frac{B'_k}{k^r}.$$

La démonstration s'achève exactement comme dans le cas précédent. En effet, soit σ'_k la somme d'ordre k de la série $\Sigma B'_k$; on a

$$B'_k = \sigma'_k - \sigma'_{k-1}$$

et, en vertu du théorème I, la somme σ'_k satisfait (comme σ_k) à la condition

$$|\sigma'_k| \leq M_r(A \log k + B).$$

Il n'y a donc qu'à accentuer σ dans la démonstration précédente.

Le théorème que nous venons d'établir rentre en partie dans un théorème de M. Bernstein ⁽¹⁾ et celui de M. Bernstein est lui-même un cas particulier du théorème V qui suit. La considération de la série conjuguée, qui n'intervient pas dans l'analyse de M. Bernstein, permet de simplifier beaucoup les démonstrations.

Nous avons montré dans les deux théorèmes précédents comment l'approximation par les sommes de Fourier est liée au module maximum de la fonction ou de ses dérivées supposées existantes. Nous allons maintenant montrer comment l'approximation est liée au module de continuité des mêmes fonctions. Ce sera l'objet des deux théorèmes suivants.

19. Théorème IV. — *On peut assigner a priori deux nombres fixes A et B jouissant de la propriété suivante : Si $f(x)$ de période 2π admet le module de continuité $\omega(\delta)$, on a*

$$|R_n| \leq (A \log n + B) \omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Nous allons rattacher ce théorème aux théorèmes II et III par un procédé de raisonnement que M. Dunham Jackson a employé dans un cas analogue ⁽²⁾.

Soit δ une partie aliquote de la période 2π . Marquons, sur la courbe $y = f(x)$, les points d'ordonnée $\lambda\delta$, où λ parcourt la suite

⁽¹⁾ *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (Mém. cité, n° 59). La démonstration de M. Bernstein concerne la représentation par polynômes trigonométriques et ne comporte pas que A et B soient des constantes absolues.

⁽²⁾ *Dissertation inaugurale*, Göttingen, 1911. Démonstration du théorème V (p. 40).

des valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Considérons inscrit qu'à ces points pour sommets; l'ordonnée de est une fonction $\psi(x)$ de période 2π . Sur chaque cône, cette fonction est linéaire et son oscillation. Comme sa dérivée ψ' est constante sur chaque côté, chacun d'eux (et, par conséquent, partout),

$$|\psi'| = \frac{\omega(\delta)}{\delta}.$$

D'autre part, sur le côté limité aux abscisses $\lambda\delta$ et $(\lambda+1)\delta$, la différence $f - \psi$, au point x , est comprise entre

$$f(x) - f(\lambda\delta) \quad \text{et} \quad f(x) - f((\lambda+1)\delta) = -\delta;$$

on a donc aussi partout

$$|f - \psi| = \omega(\delta).$$

Considérons maintenant la décomposition

$$f = (f - \psi) + \psi.$$

La série de Fourier de f est la somme de celles de $f - \psi$ et de ψ . Soient R_n , R'_n , R''_n les écarts relatifs à ces trois séries; nous avons

$$R_n = R'_n + R''_n.$$

Mais, comme $|f - \psi| = \omega(\delta)$, nous avons, par le théorème I,

$$|R'_n| \leq (A \log n + B) \omega(\delta);$$

et, comme $|\psi'| = \frac{\omega(\delta)}{\delta}$, nous avons, par le théorème I,

$$|R''_n| \leq (A \log n + B) \frac{\omega(\delta)}{n\delta}.$$

D'ailleurs, on peut satisfaire aux théorèmes II et III avec les mêmes valeurs de A et de B; nous avons donc

$$|R_n| \leq (A \log n + B) \left(1 + \frac{1}{n\delta}\right) \omega(\delta).$$

Prenons $\delta = \frac{\pi}{n}$, ce qui est bien une partie de la période

obtenons

$$|R_n| \leq \left(1 + \frac{1}{\pi}\right) (A \log n + B) \omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

C'est le théorème à démontrer : les valeurs A et B de l'énoncé s'obtiennent en multipliant par $\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$ celles de la démonstration.

20. Critérium de convergence de Dini-Lipschitz. — Ce critérium est un corollaire du théorème précédent. Il est plus précis que celui du n° 14. En voici l'énoncé :

Si le module de continuité de $f(x)$ satisfait à la condition dite de Dini-Lipschitz,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) \log \frac{1}{\delta} = 0,$$

la série de Fourier de $f(x)$ converge uniformément vers $f(x)$.

En effet, en faisant $\delta = \frac{\pi}{n}$, cette condition nous donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \log n = 0.$$

Dans ce cas, on a *uniformément*, par le théorème IV,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

21. Théorème V. — *On peut assigner a priori deux nombres fixes A et B jouissant de la propriété suivante : Si $f(x)$ de période 2π admet une dérivée d'ordre r et que celle-ci admette le module de continuité $\omega_r(\delta)$, on a*

$$|R_n| \leq (A \log n + B) \frac{\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^r}.$$

La démonstration est analogue à celle du théorème IV. Soit δ une partie aliquote de 2π . Inscrivons un polygone dans la courbe $y = f^{(r)}(x)$ en prenant pour sommets les points d'abscisses $\lambda\delta$ (λ entier). Soit $\psi(x)$ l'ordonnée de ce polygone; nous avons, comme dans la démonstration rappelée,

$$|f^{(r)} - \psi| = \omega_r(\delta), \quad |\psi'| = \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Considérons le développement de ψ en série de vergente (n° 14)

$$\psi = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx);$$

nous avons, puisque $f^{(r-1)}$ est périodique,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi - f^{(r-1)}) dx,$$

d'où, par le théorème de la moyenne,

$$|\alpha_0| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi - f^{(r-1)}| dx = \omega_r(\delta).$$

Désignons maintenant par $F(x)$ la somme de la série métrique obtenue en intégrant r fois de suite la série

$$\sum_1^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

sans introduire de constantes, de sorte que $F(x)$ est périodique, dont les dérivées d'ordre r et d'ordre $r+1$ respectivement aux conditions

$$F^{(r)} = \psi - \alpha_0, \quad F^{(r+1)} = \psi';$$

d'où, par les inégalités précédentes,

$$\begin{aligned} |(f - F)^{(r)}| &\leq |f^{(r)} - \psi + \alpha_0| \leq \omega_r(\delta), \\ |F^{(r+1)}| &= |\psi'| \leq \omega_{r+1}(\delta). \end{aligned}$$

Faisons maintenant la décomposition $f = (f - F) + F$; soient R_n, R'_n, R''_n les restes des séries de Fourier de $f - F, f - F + \alpha_0, f$ respectivement; nous avons

$$R_n = R'_n + R''_n.$$

Mais $f - F$ admet une dérivée d'ordre r , de module $\leq \omega_r(\delta)$; donc, par le théorème IV,

$$|R'_n| \leq (A \log n + B) \frac{\omega_r(\delta)}{n^r}.$$

D'autre part, F admet une dérivée d'ordre $r+1$.

$\omega(\delta) : \delta$; par conséquent,

$$|R_n| \leq (A \log n + B) \frac{1}{n^{r+1}} \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Nous en concluons

$$|R_n| \leq (A \log n + B) \left(2 + \frac{1}{n\delta}\right) \frac{\omega_r(\delta)}{n^r};$$

et, en faisant $\delta = \frac{\pi}{n}$,

$$|R_n| \leq \left(2 + \frac{1}{\pi}\right) (A \log n + B) \frac{\omega_r\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^r}.$$

On obtient donc les valeurs de A et de B qui conviennent à l'énoncé, en multipliant par $\left(2 + \frac{1}{\pi}\right)$ celles utilisées dans la démonstration.

22. Remarque. — Supposons que $f(x)$ admette une dérivée continue d'ordre $r - 1$ et que celle-ci satisfasse à une condition de Lipschitz d'ordre 1, à savoir

$$\omega_{r-1}(\delta) = M_r \delta.$$

On peut dire encore que $f(x)$ a une dérivée d'ordre r de module M_r , sans supposer, pour cela, l'existence et l'intégrabilité de cette dérivée. On a, par le théorème précédent,

$$|R_n| \leq (A \log n + B) \pi \frac{M_r}{n^r}.$$

Le théorème III subsiste donc sans supposer la dérivée d'ordre r existante et intégrable. La distinction entre les deux cas disparaîtrait d'ailleurs si l'on faisait usage de l'intégrale de Lebesgue.

23. Dérivabilité. — La dérivée d'une somme S_n de Fourier est la somme de Fourier de la dérivée $f'(x)$ supposée bornée et intégrable. Donc les dérivées successives de la série de Fourier de $f(x)$ représentent les dérivées successives de $f(x)$ aussi longtemps que ces dérivées sont exprimables en série de Fourier, donc indéfiniment si toutes les dérivées existent. Ainsi *la série de Fourier d'une fonction indéfiniment dérivable est une représentation indéfiniment dérivable de cette fonction*, et la meilleure que l'on connaisse dans ce cas.

CHAPITRE II.

APPROXIMATION PAR LES SOMMES DE FEJÉR

14. Sommes de Fejér. Les théorèmes précédents, et en particulier le théorème III, ne donnent pas la démonstration du théorème de Weierstrass sur l'approximation trigonométrique des fonctions continues. Aucune démonstration de ce théorème n'est plus élégante que celle de M. Fejér. Nous donnerons une démonstration, la forme qui convient le mieux à notre but.

La méthode de M. Fejér consiste à sommer la série trigonométrique par le procédé de la moyenne arithmétique. Désignons par σ_n la moyenne arithmétique des n premières sommes de la série, savoir

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n}.$$

Cette moyenne est une expression trigonométrique d'ordre au plus $n-1$. Nous dirons que c'est la *somme de Fejér* d'ordre n . Elle revient à une intégrale, analogue à celle de Dirichlet. Nous appellerons *intégrale de Fejér* et que nous allons faire voir qu'on a

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{dt}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t.$$

Cette sommation s'effectue par la formule

$$\sin \frac{t}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos kt}{2} - \frac{\cos (k+1)t}{2} = \frac{1}{2}.$$

d'où l'*intégrale de Fejér*

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{1 - \cos nt}{\left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2} dt.$$

nt $1 - \cos nt$ par $2 \sin^2 \frac{nt}{2}$, puis t par $2t$, elle prend la

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi f(x+2t) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 dt.$$

ns-lui un procédé de transformation que nous aurons occasion d'utiliser plus tard. Substituons sous le signe ion le développement

$$\frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t+i \cdot k\pi)^2};$$

terme à terme et observons que $f(x+2t) \sin^2 nt$ période π ; il vient, en prenant $t+i \cdot k\pi$ comme nouvelle dans chaque terme,

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+2t) \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^2 dt;$$

angeant t en $\frac{t}{n}$,

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt.$$

expression définitive de l'intégrale de Fejér.

eu d'observer que, si $f \equiv 1$, les sommes S_k et, par suite, gales à l'unité; donc

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt.$$

ropriétés fondamentales des sommes de Fejér. — Suppo- le module de f ne surpasse pas M et appliquons à l'in- Fejér le théorème de la moyenne; ceci est permis, parce teur $\left(\frac{\sin t}{t} \right)^2$ est positif, ce qui n'avait pas lieu pour le analogue dans l'intégrale de Dirichlet. Il vient

$$|\sigma_n| \leq \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = M,$$

éorème suivant, qui est fondamental :

Toute somme de Fejér a une valeur intermédiaire entre les diverses valeurs de $f(x)$. En particulier, le minimum de Fejér quelconque ne surpasse pas le minimum de cette fonction.

Revenons maintenant à l'équation (2); multiplions-la par $\sin t$ et soustrayons-la de l'équation (1). Il vient

$$\sigma_n - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f\left(x + \frac{y}{n}\right) - f(x) \right] \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt.$$

Par conséquent, si f admet le module de continuité $\omega(\delta)$, on a

$$(3) \quad |f(x) - \sigma_n| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega\left(\frac{y}{n}\right) \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt.$$

Pour former une majorante de cette intégrale, partageons l'intervalle d'intégration en trois parties (0, 1), (1, N) et (N, +∞) et, majorant dans chaque intervalle, nous obtenons comme l'approximation

$$\frac{2}{\pi} \left[\omega\left(\frac{2}{n}\right) + \int_1^N \omega\left(\frac{y}{n}\right) \frac{dt}{t^2} + \omega\left(\frac{N}{n}\right) \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \right]$$

et, en majorant davantage (n° 6, 2°),

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \left[\omega\left(\frac{2}{n}\right) + \omega\left(\frac{2}{n}\right) \int_1^N t \frac{dt}{t^{2+1}} + \omega\left(\frac{N}{n}\right) \right] \\ & \leq \frac{2}{\pi} \left[\omega\left(\frac{2}{n}\right) (1 + \log N) + \omega\left(\frac{N}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Prenant enfin $N = 2(1 + \omega(\frac{2}{n}))$, nous obtenons comme borne supérieure de l'approximation

$$|f - \sigma_n| \leq \frac{2}{\pi} \omega\left(\frac{2}{n}\right) \left[1 + \left| \log \omega\left(\frac{2}{n}\right) \right| + \omega\left(\frac{2}{n}\right) \right].$$

Si f est continue, cette expression tend vers zéro quand n tend vers l'infini, et nous avons obtenu la démonstration du théorème II de Weierstrass.

La borne de l'approximation qui précède présente peu d'intérêt. L'approximation est plus intéressante à considérer dans

à f vérifie une condition de Lipschitz d'ordre donné α

dans ce cas, une constante M qui dépend de f et satisfait à la condition

$$\omega(\delta) \leq M\delta^\alpha.$$

3) nous donne, dans ce cas,

$$|f(x) - \sigma_n| \leq \frac{2^\alpha M}{n^\alpha} \int_0^\infty t^\alpha \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt.$$

Cette intégrale existe et a une valeur purement numérique. Nous pouvons énoncer le théorème suivant, qui est dû à Fejér (1) :

fait à la condition de Lipschitz d'ordre α :

$$\omega(\delta) \leq M\delta^\alpha \quad (0 < \alpha < 1),$$

$$|f(x) - \sigma_n| \leq \frac{AM}{n^\alpha},$$

où A est une constante numérique qui peut être assignée une valeur finie toutes les fois que α est donné.

Approximation d'une somme trigonométrique finie au moyen des sommes de Fejér. — Soit $T(x)$ une expression trigonométrique d'ordre n . Désignons ses sommes de Fourier par s_0, s_1, \dots , ses sommes de Fejér par $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$. Les sommes τ_k deviennent identiques à T dès que l'indice k est $\geq n$.

$$(n+p)\tau_{n+p} = (s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}) + (s_n + \dots + s_{n+p-1})$$

$$(n+p)\tau_{n+p} = n\tau_n + pT$$

Donc T d'ordre n s'exprime par la formule suivante :

$$T = \frac{(n+p)\tau_{n+p} - n\tau_n}{p}.$$

Nous allons faire une application de ces formules.

27. Nouvelle borne inférieure de la meilleure approximation ⁽¹⁾. — Considérons une fonction $f(x)$ et une trigonométrique approchée d'ordre n , $T(x)$. Désignons précédemment, par S_k et σ_k les sommes de Fourier relatives à f , par s_k et τ_k les sommes analogues relatives à T , par ρ l'approximation fournie par T , et proposons nous une borne inférieure de ρ .

Nous avons, par définition,

$$|f - T| = \rho.$$

Observons que la somme de Fejér d'une différence des sommes de Fejér, et appliquons la propriété de la somme de Fejér (n° 25). Les sommes de Fejér sont, avec $f - T$, de module $\leq \rho$; par conséquent,

$$|\sigma_n - \tau_n| \leq \rho, \quad |\tau_{n+p} - \tau_{n+p}| \leq \rho.$$

Nous avons donc, sauf une erreur $\leq \rho$,

$$T = f, \quad \tau_n - \tau_{n+p} = \tau_{n+p} - \tau_{n+p}.$$

Substituons ces valeurs dans la relation du numéro précédent,

$$T = \frac{(n+p)\tau_{n+p} - n\tau_n}{p} = \rho.$$

L'erreur totale sera inférieure à

$$\rho + \frac{(n+p)\tau_{n+p} - n\tau_n}{p} = \frac{n+p}{p} \rho,$$

et, par conséquent, nous avons

$$\left| f - \frac{(n+p)\tau_{n+p} - n\tau_n}{p} \right| \leq \frac{n+p}{p} \rho.$$

(1) DE LA VALLÉE POUSSIN, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 21 mai 1918.

Revenons aux sommes de Fourier; il vient enfin

$$\left| f - \frac{S_n + S_{n+1} + \dots + S_{2n-p-1}}{p} \right| < 2 \frac{n+p}{p} \varepsilon.$$

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante :

La meilleure approximation ε d'une fonction f par une expression trigonométrique d'ordre n n'est pas inférieure au quotient par $2 \frac{n+p}{p}$ de l'approximation obtenue, quand on prend comme valeur approchée de f la moyenne arithmétique de p sommes de Fourier consécutives à partir de S_n . En particulier (si $p = n$), elle n'est pas inférieure au quart de celle qui est fournie par la moyenne de n sommes de Fourier consécutives à partir de S_n .

Cette règle peut se simplifier dans des cas particuliers.

Désignons par R_n l'erreur $f - S_n$, et par

$$\Lambda_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

le terme général de la série de Fourier de f . L'erreur relative à la moyenne est l'erreur moyenne, à savoir (si $p = n$)

$$\frac{R_n + R_{n+1} + \dots + R_{2n-1}}{n} = \frac{\Lambda_{n+1} + 2\Lambda_{n+2} + \dots + n\Lambda_{2n}}{n} + R_{2n},$$

et le maximum absolu de cette erreur est l'approximation fournie par la moyenne considérée.

Supposons, pour préciser, que f s'exprime en série de Fourier convergente et que la valeur de x qui maxime R_{2n} donne le même signe (donc celui de R_{2n}) à tous les termes Λ_k qui sont d'indices $> n$. Alors le maximum de l'erreur moyenne surpasse celui de $|R_{2n}|$ et nous avons la règle suivante :

Si f est développable en série de Fourier convergente, et que la valeur de x qui maxime R_{2n} donne le même signe à tous les termes de cette série d'indices $> n$, la meilleure approximation ε de $f(x)$ par une expression trigonométrique d'ordre n ne sera pas inférieure au quart de celle fournie par la somme de Fourier d'ordre double, $2n$.

28. **Ordre de la meilleure approximation de $|\sin x|$ de Bernstein.** — Cette fonction est paire et de période 2π ; sa série de Fourier ne contient donc que des cosinus de multiples de x . On a donc

$$\begin{aligned} |\sin x| &= \sum a_{2k} \cos 2kx \\ a_{2k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \cos 2kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos 2kx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(1+2k)x + \sin(1-2k)x] \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right]. \end{aligned}$$

Tous les termes sont maximisés et négatifs (sauf a_0) pour la valeur $x = 0$, et la dernière règle s'applique.

La meilleure approximation de $|\sin x|$ par un polynôme d'ordre n est inférieure à

$$\max |R_n| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=\frac{n}{2}}^{\infty} \left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1}.$$

mais elle est supérieure à

$$\frac{1}{4} \max |R_{n-1}| = \frac{1}{4\pi(n-1)}.$$

La meilleure approximation de $|\sin x|$ est donc de l'ordre de $\frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini.

La fonction $|\cos x|$ se ramène à la précédente par la substitution de x en $x + \frac{\pi}{2}$; elle admet donc la même approximation.

L'approximation de $|x|$ en série de polynômes de degré $\leq n$ ($-1, +1$) revient à la précédente par la substitution de x en $\frac{\pi}{2} - x$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui a été obtenu par des méthodes tout autres : *La meilleure approximation de $|x|$ par un polynôme d'ordre n dans l'intervalle $(-1, +1)$ est de l'ordre de $\frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini.* Cette question, que j'ai posée en 1908, a joué un rôle impo-

développement de la théorie. La solution nouvelle que j'é viens d'en donner est la plus simple.

M. Bernstein a démontré le théorème précédent par deux méthodes différentes dans son *Mémoire Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (1912) ⁽¹⁾. Il a beaucoup précisé les résultats dans un autre *Mémoire Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynômes de degrés donnés* (1913) ⁽²⁾. Dans celui-ci, il démontre que la valeur asymptotique de la meilleure approximation est la forme $\frac{\Lambda}{n}$ où Λ est une constante que l'on sait calculer au degré d'exactitude que l'on veut. Nous renverrons pour cela au *Mémoire* de M. Bernstein.

29. Dérivées des sommes de Fejér. — Comme la dérivée d'une somme de Fourier est la somme de Fourier de la dérivée, de même la dérivée d'une somme de Fejér, σ_n , de $f(x)$ est la somme de Fejér de $f'(x)$ supposée existante et bornée. Donc, *en tant qu'expression infiniment approchée pour $n = \infty$, la somme de Fejér est dérivable aussi longtemps que les dérivées successives de $f(x)$ admettent ce mode de représentation, donc aussi longtemps que ces dérivées sont continues.*

L'étude de la dérivation des sommes de Fejér conduit à des résultats intéressants. Nous allons d'abord exprimer σ'_n sous forme d'intégrale définie. Changeons t en $t - \frac{nx}{2}$ dans l'expression définitive de σ_n par une intégrale donnée au n° 24; il vient

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2t}{n}\right) \left[\frac{\sin\left(t - \frac{nx}{2}\right)}{t - \frac{nx}{2}} \right]^2 dt.$$

Or, si l'on dérive une fonction de $t - \frac{nx}{2}$, on a

$$D_x = -\frac{n}{2} D_t;$$

⁽¹⁾ *Mémoires publiés par la classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*, 2^e série, t. IV, 1912.

⁽²⁾ *Acta Mathematica*, t. 37, 1913.

il vient donc, par la règle de Leibniz,

$$D\sigma_n = \sigma'_n = \frac{n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) D_t \left[\frac{\sin\left(t + \frac{nx}{t}\right)}{t + \frac{nx}{t}} \right] \\ + \frac{n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) D\left(\frac{\sin t}{t}\right) dt;$$

et, en observant que la dérivée d'une fonction paire

$$\sigma'_n = -\frac{n}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[f\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f\left(x - \frac{2t}{n}\right) \right] D\left(\frac{\sin t}{t}\right) dt.$$

Désignons par $\Delta = \omega(\pi)$ l'oscillation de $f(x)$; théorème de la moyenne,

$$|\sigma'_n| \leq \frac{n\Delta}{2\pi} \int_0^{\pi} \left| D\left(\frac{\sin t}{t}\right) \right| dt = l\Delta n,$$

en désignant par l la constante numérique

$$l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left| D\left(\frac{\sin t}{t}\right) \right| dt.$$

Cette constante l est inférieure à $\frac{1}{4}$. En effet, quand t varie de 0 à π et sa dérivée est négative ailleurs

$$\left| D\left(\frac{\sin t}{t}\right) \right| = \left| \frac{\sin t}{t^2} - \frac{\sin^2 t}{t^3} \right| = \frac{1}{t^2} - \frac{\sin^2 t}{t^3},$$

par conséquent,

$$l \leq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D\left(\frac{\sin t}{t}\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{\sin^2 t}{t^3} \right) dt = \frac{1}{4},$$

ce qui est $\leq \frac{1}{4}$. De là, le théorème suivant :

Si $f(x)$ a pour oscillation Δ , la dérivée d'une Fejér quelconque, σ_n , de $f(x)$ est de module $\leq l\Delta n$, l constante numérique $\leq \frac{1}{4}$.

Ceci conduit à un autre résultat intéressant, l'expression trigonométrique d'ordre n . Reprenons

au moyen de deux sommes de Fejér τ_n et τ_{2n} (n° 26)

$$T = 2\tau_{2n} - \tau_n,$$

d'où

$$T' = 2\tau'_{2n} - \tau'_n.$$

Supposons que T soit de module $\leq L$, donc d'oscillation $\Delta \leq 2L$ et appliquons le théorème précédent. Nous voyons que τ'_{2n} et τ'_n sont respectivement de modules $\leq 4 \ln L$ et $2 \ln L$. Donc : *Si une expression trigonométrique d'ordre n est de module $< L$, sa dérivée est de module $< hnL$, où h est une constante numérique.*

Toutefois ce procédé de raisonnement conduit à une valeur de h trop élevée. Le facteur h peut être abaissé à 1. C'est là un théorème très remarquable et très important, mais il se rattache à des considérations d'ordre algébrique. Nous allons le démontrer.

30. Théorème. (1). — *Soit $T(x)$ une expression trigonométrique d'ordre n . Si le module de T ne surpasse pas L , celui de sa dérivée T' ne surpasse pas nL .*

Nous allons établir trois propositions préliminaires :

1° *Une expression trigonométrique d'ordre $\leq n$, $T(x)$, ne peut pas avoir plus de $2n$ racines non équivalentes, et s'il y a des racines multiples, elles comptent pour autant de racines simples qu'il y a d'unités dans leur ordre.*

Considérons la substitution

$$e^{ix} = t.$$

Elle fait correspondre à une même valeur de t une infinité de valeurs de x qui diffèrent d'un multiple de la période 2π et sont dites *équivalentes*. Deux valeurs de x qui correspondent à deux valeurs différentes de t ne satisfont pas à cette condition et sont *non équivalentes*. Soit

$$T = \sum_0^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx;$$

(1) G. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 27 mai 1918.

on aura, par la substitution précédente,

$$T(x) = \frac{1}{2} \sum_0^n \left[\alpha_k \left(t^{k+1} + \frac{1}{t^k} \right) + \beta_k \frac{1}{t} \left(t^k - \frac{1}{t^k} \right) \right] \cdot P_{2n} \left(\frac{t^2 + 1}{2t} \right),$$

où P_{2n} est un polynome de degré $2n$. Or les racines données, avec leur ordre de multiplicité, par cette fonction $P_{2n}(t)$, ce qui justifie la proposition.

2° Si la dérivée de T admet le même module maximum que la dérivée de la fonction

$$s = L \sin(n\pi + G),$$

où L est une constante donnée et G une constante on peut choisir G de manière que la différence des dérivées ait une racine double.

Soit ξ un point où $|T'|$ atteint son maximum nL ; ce point, qui est un extrémé de T' ,

$$T'(\xi) = +nL, \quad T''(\xi) = 0.$$

Déterminons G par la condition que $\cos(n\xi + G)$ ait le signe de $T'(\xi)$, nous aurons

$$s'(\xi) = +nL = T'(\xi), \quad s''(\xi) = 0.$$

Alors ξ est une racine double de $s' - T'$, car on a

$$s'(\xi) - T'(\xi) = 0, \quad s''(\xi) - T''(\xi) = 0.$$

3° Si le module maximum L' de T' ne surpasse pas le module maximum L de s' , $s' - T'$ admet au moins $2n$ racines distinctes et n racines doubles.

Soit d'abord $L' = L$. Alors s donne son signe à la différence $s' - T'$ aux $2n$ points non équivalents où $s = \pm L$. Soit

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2n}, x_{2n+1} = x_1$$

la suite de $2n + 1$ de ces points embrassant une période de la fonction $s = T$ est de signe alterné pour cette suite de points. La différence $s' - T'$ a donc $2n$ racines distinctes au moins, une dans chaque intervalle entre deux points consécutifs x_k, x_{k+1} . Mais, entre deux racines

il y en a une au moins de $s' - T'$, ce qui fait $2n$ racines distinctes de cette dérivée, qui, n'embrassant pas la période entière, sont non équivalentes.

Soit, en second lieu, $L' = L$. Donnons-nous un infiniment petit positif ε et considérons la différence

$$s - (1 - \varepsilon)T.$$

Comme dans le cas précédent, cette fonction admet $2n$ racines non équivalentes, qui s'intercalent entre les termes de la suite (1). Ces racines forment une nouvelle suite

$$(2) \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots, \xi_{2n}, \xi_1 + 2\pi, \quad (x_k < \xi_k < x_{k+1}).$$

Mais ces racines ξ_k dépendent maintenant de ε et deux racines consécutives peuvent être infiniment voisines. Si l'intervalle (ξ_k, ξ_{k+1}) n'est pas infiniment petit, ξ_k et ξ_{k+1} sont, à la limite (pour $\varepsilon = 0$), deux racines distinctes de $s - T$ (indépendant de ε) et, entre elles, il y a une racine au moins η_k de $s' - T'$ à distance finie de ξ_k et ξ_{k+1} . D'autre part, si l'intervalle (ξ_k, ξ_{k+1}) est infiniment petit et se confond, par conséquent, avec le point x_{k+1} , la racine intermédiaire de $s' - T'$ est $\eta_k = x_{k+1}$. Mais les deux intervalles (ξ_{k-1}, ξ_k) et (ξ_{k+1}, ξ_{k+2}) , contigus au précédent, sont finis, car ils contiennent respectivement x_{k-1} et x_{k+1} , et η_k est isolé des deux racines voisines η_{k-1} et η_{k+1} par la conclusion obtenue dans la première hypothèse. Donc, à chaque intervalle (fini ou non) de deux ξ_k consécutifs, correspond une racine distincte de $s' - T'$ et la conclusion sur le nombre de ces racines subsiste.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème suivant, dont celui du début est la conséquence immédiate :

THÉORÈME. — Soit $T(x)$ une expression trigonométrique entière dont le module ne surpasse pas L , si le module de sa dérivée atteint nL , $T(x)$ est de la forme

$$s = L \sin(nx + C)$$

ou bien d'ordre $\geq n$.

Supposons d'abord que $|T'|$ dépasse nL . Déterminons la constante C comme dans la démonstration de (2°) et choisissons une constante $\lambda < 1$ de manière que $|\lambda T'|$ ait pour maximum nL . Alors $|\lambda T|$ a son maximum $< L$, donc $s' - \lambda T'$ a $2n$ racines distinctes

(3°) et une racine double (2°), donc $2n + 1$ racines. Cette expression (et, par conséquent, T) est d'ordre

Supposons que $|T'|$ ait pour maximum nL . Dans a $2n + 1$ racines (comme dans le cas précédent), n identiquement nulle. Donc T est identique à s ou bien

Remarque. — Le théorème précédent a été énoncé par M. S. Bernstein, pour les fonctions T qui sont polynômes de raisonnement d'ordre analytique (1). Le même auteur l'a étendu pour le cas général, sauf l'introduction superflue de la dérivée, mais la démonstration qu'il en donne est sujette à critique.

Le théorème précédent s'applique, de proche en proche, à la dérivée d'ordre quelconque. On obtient ainsi l'énoncé

THÉORÈME. — *Si le module d'une expression trigonométrique d'ordre n ne dépasse pas L , celui de sa dérivée d'ordre k ne dépasse pas $n^k L$.*

(1) Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues. M. Bernstein étend le théorème aux fonctions impaires par assimilation; cette assimilation que porte la critique que nous formulons ici.

CHAPITRE III.

MÉTHODE GÉNÉRALE PROPRE A ABAISSER LA BORNE PRÉCÉDEMMENT ASSIGNÉE A L'APPROXIMATION.

La borne assignée à l'approximation par les sommes de Fourier comporte, dans le cas général, un facteur $\log n$, que l'on peut se proposer de faire disparaître. Les sommes de Fejér ne le permettent pas. Elles ne présentent d'ailleurs d'avantage sur celles de Fourier que pour les fonctions non dérivables. Nous sommes ainsi amenés à introduire des intégrales analogues à celle de Fejér, mais plus rapidement convergentes. Ce sont les fonctions $F_r(x, n)$, que nous allons définir.

Toutefois, avant d'aller plus loin, il convient de rappeler que les premiers résultats analogues à ceux que nous allons établir, ont été obtenus par M. D. Jackson dans sa Thèse inaugurale ⁽¹⁾. M. Jackson traite pour commencer la représentation par polynômes et en déduit après coup les théorèmes relatifs à la représentation trigonométrique. C'est la marche inverse que nous adoptons ici. Nous préciserons un peu les conclusions tout en conservant aux calculs une apparence moins rébarbative.

31. Définition de $F_r(x, n)$. Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π . Donnons-nous deux entiers positifs r et n et posons

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} F_r(x, n) &= \frac{1}{\tau(r)} \int_0^\infty f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2r} dt, \\ \tau(r) &= \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2r} dt. \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ *Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen*, etc. Univ. Buchdruckerei, Göttingen, 1911

La fonction $F_r(x, n)$ peut être considérée comme une généralisation de l'intégrale de Fejér à laquelle elle se réduit si $r = 1$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

L'expression $F_r(x, n)$ est une expression trigonométrique en x d'ordre $< rn$.

Changeons t en nt , F_r devient, à un facteur constant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2t) \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^{2r} dt.$$

Comme $f(x + 2t) \sin^{2r} nt$ admet la période π , cette intégrale se décompose dans la somme

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi} f(x + 2t) \left(\frac{\sin nt}{t + k\pi} \right)^{2r} dt \\ &= \frac{1}{(2r-1)!} \int_0^{\pi} f(x + 2t) \sin^{2r} nt D^{2r-2} \frac{1}{\sin^2 t} dt \end{aligned}$$

Mais $\sin^{2r} nt D^{2r-2} \frac{1}{\sin^2 t}$ est une expression trigonométrique entière; elle est d'ordre $2(rn-1)$, car le premier facteur est d'ordre $2rn$ et le second d'ordre -2 ; de plus, elle est périodique de période π , donc elle ne contient que des cosinus de multiples pairs de t . En définitive, F_r s'exprime linéairement en termes d'intégrales du type général

$$\int_0^{\pi} f(x + 2t) \cos 2kt dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(u) \cos k(u-x) du$$

où $k \leq rn-1$, et qui sont des expressions trigonométriques d'ordre $\leq rn$.

32. Emploi de la fonction particulière $F_2(x, n)$. — Le cas où $r = 2$ est le premier qui se présente après celui de Fejér ($r = 1$). Cette étude conduit à des résultats intéressants.

Calculons d'abord $\tau(2)$. On a, par le procédé de transformation employé plus haut et par une intégration par parties portant sur la dérivée,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^4 dt = \frac{1}{3!} \int_0^{\pi} \sin^4 t D^3 \frac{1}{\sin^2 t} dt = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \cos^2 t dt$$

donc $\tau(2) = \frac{2\pi}{3}$,

$$F_2(x, n) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 dt.$$

L'expression $F_2(x, n)$ est trigonométrique en x d'ordre $2n-1$. Quand n tend vers l'infini, elle tend, comme l'intégrale F_1 de Fejér, vers $f(x)$ supposée continue. Mais on peut abaisser la borne assignée à l'approximation. C'est l'objet du théorème suivant :

33. Théorème I⁽¹⁾. — *Si $f(x)$ de période 2π admet le module de continuité $\omega(\delta)$, $F_2(x, n)$ représente $f(x)$ avec une approximation*

$$\rho = A\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

où A est une constante numérique < 3 .

Nous avons, en effet,

$$F_2 - f = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f(x) \right] \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 dt;$$

et, en utilisant la propriété 2^o du n^o 6,

$$\left| f\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f(x) \right| \leq \omega\left(\frac{2t}{n}\right) = \omega\left(\frac{1}{n}\right)(2|t| + 1);$$

par conséquent,

$$\rho \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right) \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} (2t + 1) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 dt = A\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

en posant

$$A = \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} (2t + 1) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 dt = 1 + \frac{6}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt.$$

Enfin, en utilisant toujours le même mode de transformation, nous avons

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3} dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin^3 t}{t^2} \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 t}{\sin^2 t} dt = 1,$$

(1) Cf. DUNHAM JACKSON, *Dissertation inaugurale*, Satz VIII (p. 48).

34. **Théorème II.** — Si $f(x)$ de période 2π admet une dérivée continue et de module de continuité $\omega_1(\delta)$, $F_2(x)$ représente $f(x)$ avec une approximation

$$\varrho = A \frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n},$$

où A est une constante numérique $\approx \frac{1}{2}$.

L'équation au début de la démonstration précédente s'écrit

$$F - f = \frac{3}{2\pi} \int_0^\infty \left[f\left(x + \frac{2t}{n}\right) + f\left(x - \frac{2t}{n}\right) - 2f(x) \right] dt$$

Mais on a

$$\begin{aligned} & \left| f\left(x + \frac{2t}{n}\right) + f\left(x - \frac{2t}{n}\right) - 2f(x) \right| \\ &= \left| \frac{2}{n} \int_0^t \left[f'\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f'\left(x - \frac{2t}{n}\right) \right] dt \right| \\ & \leq \frac{2}{n} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^t (2t + 1) dt = \frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n} (2t^2 + t) \end{aligned}$$

par conséquent, par le théorème de la moyenne,

$$\varrho \leq \frac{3}{2\pi} \cdot 2 \frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \int_0^\infty (2t^2 + t) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = A \frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$$

en posant

$$A = \frac{3}{\pi} \int_0^\infty (2t^2 + t) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = \frac{3}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{3}{2}.$$

La dernière intégrale ayant été évaluée dans la démonstration précédente, il vient

$$A = \frac{3}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = \frac{5}{2}.$$

Le procédé ne s'étend pas au cas où $f(x)$ admet une dérivée d'ordre plus élevé. L'emploi d'une seule intégrale F_1

mais il faut en combiner plusieurs entre elles. Dans cette combinaison, nous utiliserons un système d'équations linéaires que nous allons d'abord discuter.

35. Sur un système linéaire. — Soient $p_0, p_1, \dots, p_\lambda$ des nombres donnés tous différents, et $a_0, a_1, \dots, a_\lambda$ des inconnues à déterminer par le système de $\lambda + 1$ équations linéaires

$$(1) \quad \begin{cases} a_0 + a_1 + \dots + a_\lambda = 1, \\ \frac{a_0}{p_0^\mu} + \frac{a_1}{p_1^\mu} + \dots + \frac{a_\lambda}{p_\lambda^\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, \lambda). \end{cases}$$

Ce système est bien déterminé, car son déterminant Δ a pour valeur

$$\Delta = \prod_{i > k} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_k} \right),$$

où le produit \prod s'étend à toutes les différences dans lesquelles on a $i > k \geq 0$. La valeur de a_0 sera

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta},$$

où Δ_0 est le déterminant qui se déduit de Δ en y remplaçant $\frac{1}{p_0}$ et ses puissances par 0, de sorte que

$$\Delta_0 = \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_\lambda} \prod_{i > k > 0} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_k} \right).$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_\lambda} \frac{1}{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} \right) \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_0} \right) \dots} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{p_1}{p_0} \right) \left(1 - \frac{p_2}{p_0} \right) \dots \left(1 - \frac{p_\lambda}{p_0} \right)} \end{aligned}$$

et les valeurs de a_1, a_2, \dots se déduisent de celle de a_0 par des permutations d'indices.

Nous aurons à utiliser le lemme suivant :

Si $p_0, p_1, \dots, p_\lambda$ sont (dans un ordre arbitraire) les puissances $1, p, p^2, \dots, p^\lambda$ d'un même nombre entier $p \geq 4$, les valeurs des inconnues a_0, a_1, \dots sont toutes de module < 2 .

Il suffit de prouver cela pour α_0 (la numérotation étant arbitraire). Dans l'expression finale de α_0 , les $\frac{p^2}{p_0}, \dots$ sont des puissances de p dont l'exposant est négatif, mais non nul. Les facteurs du dénominateur sont différents de zéro, ceux où cet exposant est positif sont les autres figurent dans le produit infini

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{p^3}\right) \dots = \frac{p}{p-1} \frac{p^2}{p^2-1} \frac{p^3}{p^3-1} \dots$$

On a, par conséquent,

$$|\alpha_0| = \frac{p}{p-1} \frac{p^2}{p^2-1} \dots = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \left(1 + \frac{1}{p^2-1}\right) \dots$$

Cet exposant est égal à

$$\frac{1}{p-1} \left[1 + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2-1} + \frac{1}{p^3-1} + \dots \right] \\ = \frac{1}{p-1} \left(1 + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2-1} + \dots \right) = \frac{1}{p-1}$$

et, par conséquent,

$$|\alpha_0| = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

36. Théorème III. — Si $f(x)$ de période $2\pi/p$ a une dérivée d'ordre r , intégrable et de module $\leq M$, on peut définir une expression trigonométrique, $T(x)$, d'ordre

$$m = p(\lambda + 2n),$$

où λ est le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{p-1}$, et telle que $f(x)$ avec une approximation

$$f(x) - T(x) = \frac{M}{n^r},$$

où $\psi(r)$ dépend de r seul et peut être assigné a priori.

Déterminons un système de $\lambda + 1$ constantes $a_0, a_1, \dots, a_\lambda$ qui vérifient les équations (1) du numéro précédent où $p_0, p_1, \dots, p_\lambda$ sont des puissances successives de p . Je dis que l'on peut définir

formule

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k F_{\lambda+2}(x, 2^k n).$$

l'ordre m de T est celui de $F_{\lambda+2}(x, 2^\lambda n)$, c'est-à-dire

$$(\lambda + 2)2^\lambda n - 1,$$

qui est conforme à l'énoncé. Il reste à prouver que T donne l'approximation ρ assignée. Posons, en abrégé,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\lambda} a_k f\left(x + \frac{2t}{2^k}\right);$$

les constantes a_k ont été déterminées par les conditions

$$\varphi(0) = f(x), \quad \varphi^{(2s)}(0) = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, \lambda),$$

qui reviennent respectivement aux $\lambda + 1$ équations linéaires (1) du numéro précédent. Nous avons maintenant

$$T(x) = \frac{1}{\tau(\lambda + 2)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+2} dt$$

comme $\varphi(0) = f(x)$,

$$T - f = \frac{1}{\tau(\lambda + 2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right) - \varphi(0) \right] \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+2} dt;$$

soit

$$T - f = \frac{1}{\tau(\lambda + 2)} \int_0^{\infty} F\left(\frac{t}{n}\right) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+2} dt,$$

posant, pour abrégé,

$$F(t) = \varphi(t) + \varphi(-t) - 2\varphi(0).$$

Nous allons évaluer le maximum ρ de $|T - f|$ par le théorème de la moyenne. Remarquons que F et toutes ses dérivées d'ordre $< r$ s'annulent pour $t = 0$, celles d'ordre impair parce que F est paire, celles d'ordre pair par les équations (2). Il vient donc, par la formule de Taylor,

$$\left| F\left(\frac{t}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{r!} \left(\frac{t}{n}\right)^r \max |F^{(r)}|.$$

Or la formule précédente montre que $\max. |F^{(r)}| \leq 2 \max. |\varphi^{(r)}|$; donc, les $|\alpha_k|$ étant ≤ 2 ,

$$|F^{(r)}| \leq 2 \sum_{k=0}^{\lambda} |\alpha_k| \left(\frac{2}{2^k}\right)^r M_r = 4^{\lambda r} \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{1}{2^{kr}} M_r = 8 \frac{M_r}{r!} \left(\frac{2}{n}\right)^r.$$

$$\left|F\left(\frac{t}{n}\right)\right| \leq \frac{8 M_r}{r!} \left(\frac{2t}{n}\right)^r.$$

Substituons cette majorante dans la formule (3)

$$\varphi = \frac{M_r}{n^r} \frac{2^r}{r!} \frac{8}{\tau(\lambda+2)} \int_0^t t^r \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+3} dt.$$

Cette formule prouve le théorème. On peut faire

$$\psi(r) = \frac{2^r}{r!} \frac{8}{\tau(\lambda+2)} \int_0^t t^r \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+3} dt.$$

Cette intégrale existe, car $2\lambda+3 = r+3$ si r est impair, si r est pair.

Observons encore que l'on a

$$\begin{aligned} \tau(\lambda+2) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r+3} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{\tan t}\right)^{r+1} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{r+1} dt = 2 \left(\frac{r}{r+1} - \frac{1}{4(r+1)}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{r+3} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^r \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2\lambda+3} dt = \int_0^{\infty} t^r \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r+3} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^r \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{r+3} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^r \sin^{r+3} t dt = \int_0^{\infty} t^r \sin^{r+3} t dt. \end{aligned}$$

Nous en concluons, r pouvant être supposé ≥ 1 ,

$$\psi(r) = \frac{2^r}{r!} \left(1 - \frac{1}{4(r+1)}\right) \frac{1}{\tau(\lambda+2)} \frac{r!}{r^{r+1}}.$$

Donc $\psi(r)$ décroît rapidement quand r augmente.

Le théorème III peut être présenté sous une forme mieux saisir la portée. Ce sera l'objet du théorème

37. Théorème III bis. — Si $f(x)$ admet une de

intégrable et de module $< M_r$, alors, quel que soit m entier et positif, $f(x)$ est susceptible d'une représentation trigonométrique d'ordre $\leq m$ avec une approximation

$$\rho < \psi_1(r) \frac{M_r}{m^r},$$

où ψ_1 est une fonction de r seul qu'on peut assigner a priori.

Nous pouvons, en vertu du théorème précédent, construire une expression T d'ordre $< (\lambda + 2) 2^\lambda n$ qui donne l'approximation

$$\rho < \psi(r) \frac{M_r}{n^r} = \psi(r) \left(\frac{m}{n}\right)^r \frac{M_r}{m^r}.$$

Prenons pour m le plus grand entier qui vérifie la condition

$$(\lambda + 2) 2^\lambda n < m;$$

nous aurons

$$m < (\lambda + 2) 2^\lambda (n + 1), \quad \text{d'où} \quad \frac{m}{n} < (\lambda + 2) 2^{\lambda+1},$$

$$\rho < \psi(r) (\lambda + 2)^r 2^{r(\lambda+1)} \frac{M_r}{m^r},$$

ce qui prouve le théorème : on peut poser

$$\psi_1(r) = \psi(r) (\lambda + 2)^r 2^{r(\lambda+1)}.$$

D'après l'approximation de ψ obtenue à la fin du numéro précédent, $\psi_1(r)$ augmente très rapidement avec r . Il serait utile de savoir si cette croissance de ψ_1 tient à la nature des choses ou si elle est imputable à l'imperfection du procédé d'approximation employé. Mais nous ne traiterons pas cette question.

38. Théorème IV. — Si $f(x)$ admet une dérivée d'ordre r continue et de module de continuité $\omega_r(\delta)$, alors, quel que soit m entier positif, $f(x)$ est susceptible d'une représentation trigonométrique d'ordre $\leq m$ avec une approximation

$$\rho < \psi_2(r) \frac{\omega_r\left(\frac{\pi}{m}\right)}{m^r},$$

où ψ_2 est une fonction de r seul qui peut être assignée a priori.

Ce théorème se déduit du précédent, par le raisonnement géné-

ralisé de D. Jackson qui permet de passer du théorème IV dans la théorie des séries de Fourier. Soit δ une aliquote de 2π . Nous savons définir une fonction f aux conditions (n° 21)

$$|f(r) - F(r)| \leq \omega_r(\delta), \quad |F(r+1) - F(r)| \leq \omega_r(\delta).$$

Ainsi f est la somme de deux fonctions $f_1 = F$ et f_2 . On s'applique le théorème précédent, et qui sont susceptibles d'une représentation d'ordre m avec les approximations

$$\varphi_1 = \psi_1(r) \frac{\omega_r(\delta)}{m^r}, \quad \varphi_2 = \psi_2(r+1) \frac{\omega_r(\delta)}{m^{r+1}}.$$

Donc f admet l'approximation $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, qui est proposée en faisant $\delta = \frac{\pi}{m}$. On a

$$\psi_2(r) = 2\psi_1(r) + \frac{1}{\pi}\psi_1(r+1).$$

Ce théorème donne, comme cas particulier, le suivant.

THÉORÈME (1). — *Si $f(x)$ admet une dérivée continue qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α , susceptible d'une représentation trigonométrique avec une approximation*

$$\varphi = \frac{M}{m^{1+\alpha}},$$

où M est une constante par rapport à m ,

En effet, on a, dans ce cas (M_1 constant),

$$\omega(\delta) = M_1 \delta^\alpha.$$

On obtient donc l'inégalité précédente en posant

$$M = \psi(r) M_1 m^{-\alpha}.$$

(1) Cf. D. JACKSON, *Dissertation inaugurale*, Satz VII (1) considère toutefois que la condition de Lipschitz d'ordre α .

CHAPITRE IV.

THÉORÈMES RÉCIPROQUES. PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES QUE SUPPOSE UN ORDRE DONNÉ D'APPROXIMATION.

Dans les Chapitres précédents, nous nous sommes donné les propriétés différentielles de $f(x)$ et nous en avons déduit la possibilité d'un certain ordre d'approximation. Nous allons maintenant traiter le problème inverse. Nous supposerons que la fonction $f(x)$ de période 2π est représentable avec une approximation d'un certain ordre et nous remonterons aux propriétés différentielles qui en résultent pour la fonction.

Voici le théorème fondamental :

39. Théorème I. — *Désignons par $\Omega(x)$ une fonction de x non croissante, au moins à partir d'une valeur suffisamment grande de x , et qui tend vers zéro pour $x = \infty$. Alors, si la fonction $f(x)$ de période 2π peut être représentée, quel que soit n , par une expression trigonométrique d'ordre $\bar{\xi}n$ avec une approximation*

$$(1) \quad \rho_n \leq \frac{\Omega(n)}{n^r},$$

où r est un entier nul ou positif; et si l'intégrale à limite infinie

$$\int^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x}$$

existe, $f(x)$ possède une dérivée continue d'ordre r et cette dérivée admet le module de continuité

$$(2) \quad \omega(\delta) \leq h \left[\delta \int_a^{\frac{a}{\delta}} \Omega(x) dx + \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x} \right],$$

où a et h sont des constantes convenables par rapport à δ .

Dans le cas où $r = 0$, $\omega(\delta)$ désigne le module de $f(x)$ lui-même.

Sous les conditions du théorème, $f(x)$ peut être une série d'expressions trigonométriques u_n

$$f(x) = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

dont le terme u_n (qui peut être nul) est d'ordre n et le reste

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

satisfait à la condition

$$|R_n| \leq \frac{\Omega(x)}{n^r}.$$

Donnons-nous un entier $\alpha > 1$ tel que $\Omega(x)$ soit $O(x^\alpha)$ pour $x > \alpha$. Il suffit de prouver que la dérivée d'ordre

$$R_{\alpha}^{(r)}$$

existe et admet un module de continuité $\omega(\delta)$ qui vérifie l'inégalité de la forme (2). En effet, il est clair que les termes de $f - R_{\alpha}^{(r)}$ qui sont des expressions trigonométriques admettent un module de continuité vérifiant cette condition, pourvu que $\Omega(x)$ ne soit pas identiquement nulle, ce qui ne pose évidemment. Faisons cette démonstration.

Posons

$$\varphi_k = R_{\alpha}^{(r)} - R_{\alpha-1}^{(r)},$$

nous aurons

$$R_{\alpha}^{(r)} = \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_k + \dots$$

Mais φ_k est une expression trigonométrique d'ordre k dont le module ne surpasse pas les bornes assignées. Par conséquent, Ω étant non croissant,

$$|\varphi_k| \leq \frac{\Omega(x)}{k^{\alpha}}.$$

Alors, d'après le théorème connu (n° 30) sur l'ordre des dérivées d'une expression trigonométrique d'ordre k , on a

$$|\varphi_k^{(r)}| \leq \frac{\Omega(x)}{\alpha k^{\alpha}} (k^{\alpha-1})^{r+1} = (k^{\alpha-r}) \Omega(x).$$

$$|\varphi_k^{(r+1)}| \leq \frac{\Omega(x)}{\alpha k^{\alpha}} (k^{\alpha-1})^{r+2} = (k^{\alpha-r-1}) \Omega(x).$$

résulte de la première de ces deux inégalités que l'on a

$$R_{a^2}^{(r)} = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_k^{(r)}$$

cette dérivée est continue, parce que la série dérivée ainsi que est uniformément convergente. Nous allons, en effet, prouver que l'on peut en former une série majorante convergente. Considérons les termes à partir de $k = \mu + 1$; nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \max. |\varphi_k^{(r)}| &\leq 2a^r \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \Omega(a^k) \\ &= 2a^{r+1} \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \frac{\Omega(a^k)}{a^k} \frac{a^{k-1}(a-1)}{a-1} \\ &= \frac{2a^{r+1}}{a-1} \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \frac{\Omega(a^k)}{a^k} (a^k - a^{k-1}) \\ &= \frac{2a^{r+1}}{a-1} \int_{a^{\mu}}^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

la série majorante $2a^r \sum \Omega(a^k)$ écrite sur la première ligne est convergente.

Calculons maintenant le module de continuité de cette dérivée.

Soit Δx un accroissement de x de module $< \delta$ et ΔR_{a^2} , $\Delta \varphi_k$ les accroissements correspondants des fonctions. Nous avons

$$\Delta R_{a^2}^{(r)} = \sum_{k=2}^{\mu} \Delta \varphi_k^{(r)} + \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \Delta \varphi_k^{(r)}.$$

Appliquons le théorème des accroissements finis à la première somme. Nous avons

$$\omega(\delta) \leq \delta \sum_{k=2}^{\mu} \max. |\varphi_k^{(r+1)}| + 2 \sum_{k=\mu+1}^{\infty} \max. |\varphi_k^{(r)}|.$$

Nous avons déjà obtenu pour la seconde somme une intégrale

majorante. Faisons la même chose pour la première

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\mu} \max. |\varphi_k^{(j+1)}| &= a^{p+2} \sum_2^{\mu} \Omega(a^2 + a^{k-1}) \\ &= a^{p+2} \sum_2^{\mu} \Omega(a^2 + a^2) \\ &= a^{p+2} \int_2^{\mu} \Omega(x) dx, \end{aligned}$$

Substituons dans la borne de $\omega(\delta)$ les deux valeurs; il vient

$$\omega(\delta) \leq \delta \frac{a^{p+2}}{a-1} \int_2^{\frac{a}{\delta}} \Omega(x) dx + \frac{a^{p+1}}{a-1} \int_1^{\frac{a}{\delta}} \Omega(x) dx.$$

Choisissons l'entier μ qui vérifie les conditions

$$a^{\mu-1} \leq \frac{1}{\delta} < a^{\mu}, \quad \text{d'où} \quad a^{\mu} = \frac{a}{\delta},$$

il vient

$$\omega(\delta) \leq \frac{2a^{p+2}}{a-1} \left| \delta \int_2^{\frac{a}{\delta}} \Omega(x) dx + \int_1^{\frac{a}{\delta}} \Omega(x) dx \right|,$$

ce qui est équivalent à la formule de l'énoncé.

40. Théorème II. — Si, en plus des conditions précédentes, on peut assigner une constante h telle que la fonction $x^2 \Omega(x)$ soit non décroissante à partir d'une certaine valeur déterminée a de x , alors $f^{(p)}(x)$ admet le module

$$\omega(\delta) \leq h \int_1^{\frac{a}{\delta}} \Omega(x) dx,$$

où h' est une constante par rapport à δ .

Il faut démontrer qu'il suffit de conserver la formule (2) et, pour cela, que ce second terme est infiniment petit par rapport au premier. Pour s'en

vérifier que le quotient de ces deux termes

$$\int_x^\infty \Omega(x) \frac{dx}{x} : \frac{1}{x} \int_a^{ax} \Omega(x) dx$$

ne tend pas vers zéro pour $x = \infty$.

C'est la conséquence du théorème de la moyenne. On en conclut, $x^\alpha \Omega(x)$ étant non décroissant,

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \Omega(x) \frac{dx}{x} &= \int_x^\infty x^\alpha \Omega(x) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} > \frac{\Omega(x)}{\alpha}, \\ \frac{1}{x} \int_a^{ax} \Omega(x) dx &= \frac{1}{x} \int_a^{ax} x^\alpha \Omega(x) \frac{dx}{x^\alpha} \\ &< \frac{(ax)^\alpha \Omega(ax)}{x} \frac{(ax)^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \frac{\alpha \Omega(ax)}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Donc $\Omega(x)$ étant non croissant et $\alpha > 1$, le quotient de ces deux termes est $> \frac{1-\alpha}{\alpha^2}$.

Nous considérerons d'abord une application particulière du théorème précédent, qui fait apparaître sous une forme singulièrement précise la dépendance réciproque qui existe entre l'approximation et les propriétés différentielles de la fonction.

41. Théorème III. — *Si $f(x)$ admet une dérivée continue d'ordre r qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α ($0 < \alpha < 1$, limites exclues), alors, quel que soit n , $f(x)$ est susceptible d'une représentation trigonométrique d'ordre $\leq n$, avec une approximation*

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+\alpha}} \quad (M \text{ const.}).$$

Réciproquement, s'il est possible de satisfaire à cette condition quel que soit n , $f(x)$ admet une dérivée continue d'ordre r satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre α (1).

(1) M. Bernstein a seulement prouvé que f vérifie une condition d'ordre $\leq \alpha$. Sur la meilleure approximation des fonctions continues (n° 14). Nous avons énoncé le théorème sous sa forme précise dans une conférence faite à la séance de la Société mathématique suisse, tenue à Fribourg le 24 février 1918. (*L'Enseignement mathématique*, t. XX, 1918, p. 23).

Nous connaissons déjà le théorème direct (n° 3) démontrer la réciproque. On a, par hypothèse, q

$$\varphi_n = \frac{1}{n^x} \left(\frac{M}{n^x} \right),$$

de sorte que la fonction $\Omega(x)$ des théorèmes précéd

$$\Omega(x) = \frac{M}{x^x}.$$

Les conditions des théorèmes I et II sont vérifiées

L'intégrale $\int_1^\infty \Omega(x) \frac{dx}{x}$ existe et $x^\alpha \Omega(x)$ est égal décroissant. Donc, en vertu du théorème précéde dérivée continue d'ordre x , qui admet le module de

$$\omega(\delta) = h \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\delta}} = \frac{h}{\delta} (1 - \delta),$$

ce qui est une condition de Lipschitz d'ordre x .

Le théorème précédent suppose essentiellement ses limites 0 et 1. A ces limites, la correspondance précise. On s'en apercevra dans les théorèmes suivants.

42. Théorème IV. *S'il est possible, quel que soit ε , de représenter $f(x)$ par une expression trigonométrique avec une approximation*

$$\varphi_n = \frac{M}{n^x (\log n)^{1+\alpha}},$$

où M et α sont des constantes positives, $f(x)$ possède d'ordre x , laquelle admet le module de continuité

$$\omega(\delta) = \frac{h}{\left(\log \frac{1}{\delta} \right)^\alpha} \quad (h \text{ const.})$$

Les conditions des théorèmes I et II sont encore vérifiées. Donc, en vertu du théorème II, $f(x)$ admet une dé

d'ordre r , laquelle admet le module de continuité

$$\omega(\delta) \leq h' \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{1+\alpha}} = \frac{h'}{\alpha} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\alpha}},$$

ce qui prouve le théorème.

On s'assure facilement qu'à tout critérium de convergence absolue des intégrales à limites infinies, on peut faire correspondre un théorème analogue aux précédents. On peut ainsi formuler un théorème correspondant à chacun des critères de convergence de Cauchy, basés sur la considération des fonctions successives :

$$\frac{1}{x^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{x(\log x)^{1+\alpha}}, \quad \frac{1}{x \log x (\log \log x)^{1+\alpha}}, \quad \dots$$

Les théorèmes III et IV correspondent aux deux premiers termes.

43. Les cas d'exception au théorème I. — Le théorème I suppose la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x}.$$

Cette condition est essentielle pour que l'on puisse affirmer l'existence et la continuité de la dérivée d'ordre r . L'hypothèse que $\Omega(x)$ tende vers zéro pour $x \rightarrow \infty$ ne suffit pas. Nous allons le montrer par un exemple très caractéristique, dans le cas où $r = 1$.

Soit $\Omega(x)$ une fonction continue de x qui tend *en décroissant* vers zéro quand x tend vers l'infini. Définissons $f(x)$ par la série absolument et uniformément convergente

$$f(x) = \frac{\Omega(1)}{1} \sin x + \frac{\Omega(2)}{2^2} \sin 2x + \dots + \frac{\Omega(n)}{n^2} \sin nx + \dots$$

Les n premiers termes donnent une représentation d'ordre n avec l'approximation

$$\varphi_n = \Omega(n) \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right] < \frac{\Omega(n)}{n}.$$

C'est la condition envisagée dans le théorème I pour $r = 1$. Nous allons montrer que la continuité ou la non continuité de

la dérivée $f'(x)$ dépend exclusivement de l'existence ou de la non existence de $\int_1^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x^2}$.

Remarquons d'abord que l'existence ou la non existence de l'intégrale entraînent la convergence ou la divergence de la série (1).

$$(1) \quad \frac{\Omega(1)}{1} + \frac{\Omega(2)}{2^2} + \dots + \frac{\Omega(n)}{n^2} + \dots$$

car, $\Omega(x)$ étant décroissant, cette série est comprise entre deux bornes

$$\int_1^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x^2}, \quad \Omega(1) + \int_1^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x^2}.$$

Donc, si l'intégrale existe, auquel cas la série converge, la dérivée $f'(x)$ existe, est continue et s'exprime par la série

$$(2) \quad f'(x) = \frac{\Omega(1)}{1^2} \cos x - \frac{\Omega(2)}{2^2} \cos 2x + \dots$$

parce que cette série est uniformément convergente.

Supposons maintenant l'intégrale infinie et la dérivée $f'(x)$ n'existe pas.

La dérivée $f'(x)$ existe, est continue et est donnée par la formule (2), sauf pour les valeurs $x = 0 \pmod{2\pi}$, où la série ne reste uniformément convergente dans les intervalles $(2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$ pas ces valeurs. C'est la conséquence d'un lemme et d'un théorème. Les sommes partielles

$$\cos kx + \cos(k+1)x + \dots + \cos lx$$

sont alors bornées, car elles sont de module moindre que

$$(3) \quad \left| \sum_{k=0}^l e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{|e^{ix} - 1|},$$

et cela entraîne la convergence uniforme de la série (2) car les coefficients des cosinus vont en décroissant.

Mais si x tend vers zéro, $f'(x)$ augmente indéfiniment, la dérivée est discontinue. Nous allons, en effet, montrer que la série (2) augmente indéfiniment. A cet effet, soit

entier contenu dans $\frac{\pi}{2x}$. Partageons la série (2) en deux parties

$$\sum_{\lambda=1}^X \frac{\Omega(\lambda)}{\lambda} \cos \lambda x + \sum_{\lambda=X+1}^{\infty} \frac{\Omega(\lambda)}{\lambda} \cos \lambda x.$$

La première tend manifestement vers l'infini quand x tend vers zéro, car tous les termes sont positifs et la série $\sum \frac{\Omega(\lambda)}{\lambda}$ est infinie. Mais je dis que la seconde partie reste finie. Appliquons de nouveau le lemme d'Abel, en nous servant de la borne (3) que nous venons d'assigner aux sommes partielles de cosinus. La seconde partie est de module moindre que

$$\frac{\Omega(X+1)}{X+1} \left| \frac{2}{e^{ix}-1} \right| \Omega \left(\frac{\pi}{2x} \right) \frac{4}{\pi} \left| \frac{x}{e^{ix}-1} \right|.$$

Quand x tend vers zéro, le dernier facteur a pour limite l'unité et l'expression entière tend vers zéro avec le facteur $\Omega \left(\frac{\pi}{2x} \right)$. Donc la somme des deux parties de la série (2) tend vers l'infini.

Cet exemple simple prouve combien est stricte la condition d'existence de l'intégrale à limite infinie formulée dans le théorème I.

Le même exemple prouve aussi que l'exclusion du cas limite $\alpha = 1$ est essentielle dans l'énoncé du théorème III. La condition

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+1}} \quad (M \text{ const.})$$

n'entraîne pas nécessairement l'existence d'une condition de Lipschitz d'ordre 1 pour la dérivée d'ordre r , ou pour la fonction elle-même, si $r = 0$ (comme dans l'exemple précédent). On a, dans cet exemple, $\rho_n < \frac{\Omega(n)}{n}$, et cependant $f(x)$ n'est pas lipschitzienne puisque sa dérivée n'est pas bornée. Toutefois, sous la condition $\rho_n < M : n^{r+1}$, la dérivée d'ordre r est continue et le théorème suivant permet d'en évaluer le module de continuité.

44. Théorème V. — *S'il est possible, quel que soit n , de représenter $f(x)$ par une expression trigonométrique d'ordre $\leq n$*

avec une approximation

$$\rho_n \leq \frac{M}{n^{r+1}} \quad (M \text{ const.}),$$

alors $f(x)$ possède une dérivée continue d'ordre r ,
admet le module de continuité

$$\omega(\delta) \leq h \delta |\log \delta| \quad (h \text{ const.}).$$

En effet, le théorème I, où il faut faire

$$\Omega(x) = \frac{1}{x^r},$$

assigne à $\omega(\delta)$ la borne

$$h \left[\delta \int_a^{\frac{a}{\delta}} \frac{dx}{x} + \int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{dx}{x^2} \right] = h \delta [|\log \delta| + 1],$$

ce qui revient (sauf la valeur de h) à la forme proposée.

En particulier, si l'on a, comme dans l'exemple du précédent,

$$\rho_n = \frac{M}{n},$$

$f(x)$ admet le module de continuité

$$\omega(\delta) = h \delta |\log \delta|,$$

mais on ne peut pas affirmer l'existence de la dérivée

CHAPITRE V.

APPROXIMATION PAR POLYNOMES ; RÉDUCTION A UNE APPROXIMATION TRIGONOMÉTRIQUE.

45. Polynomes trigonométriques. Réduction des deux modes d'approximation l'un à l'autre. — Comme nous le savons déjà (n° 5), l'approximation par polynomes revient à une approximation trigonométrique. Tout intervalle (a, b) se ramène à l'intervalle $(-1, +1)$ par une substitution linéaire, il suffit donc d'étudier l'approximation par polynomes dans l'intervalle $(-1, +1)$. C'est ce que nous allons faire.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans cet intervalle. La substitution

$$x = \cos t$$

transforme $f(x)$ en $f(\cos t) = \varphi(t)$, qui est une fonction paire et périodique de t . L'approximation trigonométrique de $\varphi(t)$ et celle de $f(x)$ par des polynomes sont deux problèmes complètement équivalents. Cette équivalence est mise le plus simplement en évidence par l'emploi des polynomes trigonométriques.

Le polynome trigonométrique de degré n est défini par la formule

$$P_n(x) = \cos n \arccos x.$$

Cette formule définit effectivement un polynome en x de degré n , car on a

$$\cos nt = \frac{e^{nti} + e^{-nti}}{2} = \frac{(\cos t + i \sin t)^n + (\cos t - i \sin t)^n}{2};$$

et, par la substitution

$$\cos t = x, \quad \text{d'où} \quad t = \arccos x,$$

il vient

$$\cos n \arccos x = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$$

Comme les radicaux se détruisent, cette expression est un polynôme en x de degré n .

Il est immédiat que la substitution $x = \cos t$ fait passer à tout polynôme approché de $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ une expression trigonométrique approchée de $f(\cos t)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ qui est également vraie. Supposons que nous ayons pour $f(\cos t)$ une expression trigonométrique approchée ne contenant que des cosinus puisque $f(\cos t)$ est une fonction paire, à-dire que nous ayons, avec une certaine approximation

$$f(\cos t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \cos 2t + \dots + \alpha_n \cos nt$$

nous aurons, avec la même approximation,

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) + \dots + \alpha_n P_n(x)$$

46. Série de polynômes trigonométriques. — Nous déduisons la série de polynômes trigonométriques de $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ en déduisant de celle de Fourier de $f(\cos t)$ par la méthode de Fourier. Le développement de $f(\cos t) = \varphi(t)$ en série de Fourier sous la forme

$$\frac{1}{2} \alpha_0 + \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \cos 2t + \dots + \alpha_n \cos nt + \dots$$

où l'on a

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos t) \cos nt \, dt.$$

Le développement de $f(x)$ en série de polynômes trigonométriques dans l'intervalle $(-1, +1)$, sera

$$\frac{1}{2} \alpha_0 + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) + \dots + \alpha_n P_n(x) + \dots$$

où α_n , exprimé en fonction de x , sera

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

47. Bornes inférieures assignables à la meilleure approximation par polynômes. — Les deux règles que nous avons

considération des séries de Fourier, et qui assignent une borne inférieure à la meilleure approximation trigonométrique, se traduisent en règles correspondantes relatives à la meilleure approximation par polynômes dans l'intervalle $(-1, +1)$. Voici d'abord l'énoncé qui correspond à la première (n° 9, 6°) :

I. *La meilleure approximation d'une fonction continue $f(x)$ par un polynôme de degré n dans l'intervalle $(-1, +1)$ n'est pas inférieure à*

$$\sqrt{\frac{1}{2} (\alpha_{n+1}^2 + \alpha_{n+2}^2 + \dots)},$$

où les α_k sont les constantes de Fourier de $f(\cos t)$.

L'énoncé qui correspond à la seconde règle, c'est-à-dire à celle de Lebesgue (n° 17), sera le suivant :

II. *Si la somme de degré n des termes du développement de $f(x)$ en série de polynômes trigonométriques donne une approximation φ_n , la meilleure approximation de $f(x)$ par un polynôme de degré n dans l'intervalle $(-1, +1)$ n'est pas inférieure à*

$$\frac{\varphi_n}{A \log n + B},$$

où A et B sont deux nombres assignés a priori.

48. **Approximation obtenue par transformation de l'intégrale de Fejér généralisée $F_2(x, n)$ (n° 31).** Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $(-1, +1)$. Formons l'expression $F_2(t, n)$ relative à $f(\cos t)$ (n° 32). Cette expression est un polynôme en $\cos t$ et elle représente $f(\cos t)$ avec une approximation qui fait l'objet du théorème I du n° 33. Par la substitution $\cos t = x$, $F_2(t, n)$ se transforme dans un polynôme en x fournissant, pour $f(x)$, la même approximation. Soit $\omega(\delta)$ le module de continuité de $f(x)$, celui de $f(\cos t)$ ne lui est pas supérieur, car $\cos t$ varie moins vite que t . Le théorème I du n° 33 se transforme donc dans celui-ci :

THÉORÈME I. *Si $f(x)$ admet le module de continuité $\omega(\delta)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, le polynôme approché de*

degré $2n-2$ transformé de $F_2(r, t)$ fournit

$$\varphi = A\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

où A est un nombre < 3 ⁽¹⁾.

Supposons ensuite que $f(x)$ ait une dérivée continue de module de continuité $\omega_1(\delta)$. Proposons-nous le théorème II du n° 34. Il faut au préalable calculer la continuité de

$$Df(\cos t) = f'(\cos t) \sin t$$

Si l'on donne à t un accroissement h de module ment de cette dérivée est

$$-f'(\cos t) \Delta \sin t = \sin t = h \sin t,$$

où Δ est la caractéristique de l'accroissement de t . Mais $|\Delta \sin t|$ est $< \delta$ et $|\sin t| = h$ est < 1 ; donc les modules de continuité de $f' et de $f'(\cos t)$ sont inférieurs à$

$$\delta \max |f'| + \omega_1(\delta).$$

Supposons qu'on ait $f'(0) = 0$. On peut toujours la condition en retranchant au préalable de $f(x)$ le premier degré $xf'(0)$, ce qui ne change pas le module de continuité de la dérivée. Dans cette hypothèse, on a, entre

$$|f'(x)| = \omega_1(x)$$

et le module de continuité de $Df(\cos t)$ est inférieur

$$\delta \omega_1(1) = \omega_1(\delta).$$

Le théorème II du n° 34 conduit ainsi au suivant

THÉORÈME II. — Soit $f(x)$ une fonction dont la première admet le module de continuité $\omega_1(\delta)$ de l'ordre α ($-1, +1$); on peut en définir un polynôme

⁽¹⁾ M. D. Jackson a défini le premier un polynôme donnant la meilleure approximation (Dissertation inaugurale, Satz V, p. 100). C'est à l'écart de ce polynôme qu'il introduit la fonction $\omega(\delta)$.

d'ordre $2n - 2$ ($n > 1$) donnant une approximation

$$\rho < A \left[\frac{\omega_1(1)}{n^2} + \frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \right] < 2A \frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n},$$

où A est un nombre $< 5 : 2$.

Pour aller plus loin et formuler des théorèmes concernant le cas où la dérivée d'ordre r quelconque existe, il convient de chercher d'abord une borne de $|D^r f(\cos t)|$.

49. Borne de $|D^r f(\cos t)|$. — Le calcul de proche en proche met en évidence que l'on a

$$D^r f(\cos t) = \sum_{s=1}^r f^{(s)}(\cos t) \frac{P_s}{s!},$$

où P_s est un polynôme de degré s en $\sin t$ et $\cos t$, indépendant de f . Pour déterminer P_s , il est donc permis de supposer f développable en série de Taylor. Posons

$$x = \cos t, \quad f(x) = F(t), \quad k = \cos(t+h) - \cos t;$$

il vient, par la formule de Taylor,

$$F(t+h) = f(x+k) = \sum_0^{\infty} f^{(s)}(x) \frac{k^s}{s!}.$$

Dérivons r fois par rapport à h , puis posons $h = 0$. En observant que k s'annule avec h , il reste

$$F^{(r)}(t) = \sum_{s=1}^r f^{(s)}(x) \frac{1}{s!} [D_h^r k^s]_{h=0};$$

d'où, par comparaison avec la formule du début,

$$P_s = [D_h^r k^s]_{h=0}.$$

Cherchons maintenant une borne supérieure de $|P_s|$. A cet effet, remarquons qu'on a

$$k = \cos(t+h) - \cos t = \cos(\cos h - 1) - \sin t \sin h.$$

Il s'ensuit que le développement de k suivant les puissances de h

s'obtient en multipliant les termes du développement respectivement par l'un des quatre facteurs $\pm \cos$ modules ≤ 1 , et qu'on a, par conséquent, même pour

$$|k| = e^{2h} - 1.$$

Faisons décrire à h une circonférence de rayon l'origine; nous aurons, pour $h = 0$, par la formule classique de Cauchy, le maximum étant pris sur la c

$$|D_h^r k|_{h=0} \leq r! \max |k| = r! (e - 1)^r.$$

Substituons ces majorantes dans la formule de dérivation plus haut; il vient

$$|D^r f(\cos t)| \leq r! \sum_{s=1}^r |f^{(s)}(x)| e^{s-1} e^{-1}.$$

Introduisons des hypothèses plus particulières sur la fonction $f(x)$. Supposons que $f^{(r-1)}(x)$ soit de module ≤ 1 et que les dérivées des ordres moindres s'annulent ainsi que $f(x)$ pour $x = 0$. Nous avons, dans ce cas,

$$|f^{(s)}(x)| \leq M_r, \quad |f^{(r-1)}(x)| \leq \frac{M_r}{1} x, \quad |f^{(r-2)}(x)| \leq \frac{M_r}{2} x^2,$$

et, par conséquent, dans l'intervalle $t = -1, +1$,

$$|f^{(s)}(x)| \leq M_r, \quad |f^{(r-1)}(x)| \leq \frac{M_r}{1}, \quad \dots, \quad |f^{(r-2)}(x)| \leq \frac{M_r}{2}.$$

Substituant de nouveau ces majorantes, il vient

$$|D^r f(\cos t)| \leq M_r \sum_{s=1}^r \frac{r!}{s!} \frac{r!}{r-s!} e^{s-1} e^{-1} = M_r (e - 1)^r.$$

Cette borne suppose que $f(x)$ et ses $r-1$ premières dérivées s'annulent pour $x = 0$, mais on peut toujours réaliser cette condition en retranchant de $f(x)$ un polynôme de degré $r-1$, ce qui ne change pas la dérivée d'ordre r ; par conséquent, la valeur de M_r . Nous allons utiliser ce résultat dans le numéro suivant.

§0. Approximation par les séries de polynômes

triques ⁽¹⁾. — En vertu du théorème III du Chapitre II (n° 18), on peut assigner *a priori* deux constantes A et B, telles que si $\varphi(t)$ de période 2π admet une dérivée d'ordre r de module $< M_r$, l'approximation fournie par la somme de Fourier d'ordre n quelconque de φ est inférieure à

$$(A \log n + B) \frac{M_r}{n^r}.$$

Si l'on suppose $f^{(r)}(x)$ de module $< M_r$, il existe un théorème correspondant sur la représentation de $f(x)$ en série de polynômes trigonométriques. Dans ce cas, l'approximation est la même que celle de $f(\cos t) = \varphi(t)$ en série de Fourier; elle sera donc donnée par la formule précédente, où il faut seulement remplacer M_r par une borne supérieure de $|D^r f(\cos t)|$.

Considérons une somme d'ordre $n \geq r - 1$. Alors, pour calculer cette borne, nous pouvons admettre que f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $r - 1$ s'annulent pour $x = 0$, auquel cas cette borne est $M_r e^r$. Cela est permis, parce que, si cette condition n'avait pas lieu, on la réaliserait en retranchant de f un polynôme convenable P de degré $r - 1$. Or $f - P$ a même dérivée d'ordre r que f et, d'autre part, le développement en série de polynômes trigonométriques de f s'obtient en ajoutant P à celui de $f - P$. Donc, pour un ordre $n \geq r - 1$, l'approximation de f est la même que celle de $f - P$. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME III. — Si $f(x)$ admet, dans l'intervalle $(-1, +1)$, une dérivée intégrable et de module $< M_r$, la somme de degré $n \geq r - 1$ de la série de polynômes trigonométriques de $f(x)$ fournit, dans cet intervalle, une approximation inférieure à

$$(A \log n + B) M_r \left(\frac{e}{n} \right)^r,$$

où A et B sont les deux mêmes nombres que dans le théorème rappelé (n° 18).

Ce théorème en fournit un second concernant le cas où la dérivée d'ordre r est continue. Voici ce théorème, que nous allons démontrer :

(1) C'est M. Bernstein qui a étudié le premier cette question (*Sur la meilleure approximation des fonctions continues*, Chap. VI).

THÉOREME IV. — Si $f(x)$ admet, dans l'intervalle (—) une dérivée d'ordre r dont le module de continuité satisfait à la somme de degré $n \geq r$ de la série de polynômes tri- triques de $f(x)$ fournit, dans cet intervalle, une approximation inférieure à ⁽¹⁾

$$(A \log n + B)(e^r + e^{r+1}) \frac{\omega_r\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r},$$

où A et B sont les mêmes nombres que ci-dessus.

Soit δ une partie aliquote de l'unité; inscrivons un polygone $y = \psi(x)$ dans la courbe $y = f^{(r)}(x)$, en prenant pour sommets tous les points d'abscisses $\lambda \delta$ (λ entier); nous avons, comme dans la démonstration du théorème V du Chapitre III (n° 21),

$$|f^{(r)} - \psi| \leq \omega_r(\delta), \quad |\psi'| \leq \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Soit F une fonction admettant ψ pour dérivée d'ordre r ; nous avons

$$|(f - F)^{(r)}| = |f^{(r)} - \psi| \leq \omega_r(\delta), \quad |F^{(r+1)}| = |\psi'| \leq \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Faisons la décomposition $f = (f - F) + F$ et désignons par R'_n, R''_n les restes des séries de $f, f - F$ et F respectivement; nous avons, pour $n \geq r$, en vertu du théorème précédent,

$$|R'_n| \leq (A \log n + B) \left(\frac{e}{n}\right)^r \omega_r(\delta),$$

$$|R''_n| \leq (A \log n + B) \left(\frac{e}{n}\right)^{r+1} \frac{\omega_r(\delta)}{\delta}.$$

Mais $R_n = R'_n + R''_n$. Ajoutons donc les deux égalités précédentes et faisons $\delta = \frac{1}{n}$; nous trouvons la borne assignée à R_n .

§4. Polynômes conduisant, dans le cas général, à une approximation. — Le théorème III bis du Chapitre III (n° 59) se transforme aussi par la substitution $x = \cos t$; et, m

(1) M. Bernstein énonce un théorème qui rentre comme cas particulier celui-ci. Toutefois, il n'étudie pas la manière dont l'approximation est obtenue. [Sur la meilleure approximation des fonctions continues (n° 59)].

l'introduction d'un polynôme auxiliaire de degré $< r$ (comme dans le cas précédent), on est conduit au théorème suivant :

THÉOREME V ⁽¹⁾. — *On peut définir a priori une fonction $\Psi_1(r)$ de r seul qui jouit de la propriété suivante : quel que soit l'entier $m > r$, une fonction $f(x)$ dont la dérivée d'ordre r est intégrable et de module $\leq M_r$ dans l'intervalle $(-1, +1)$, peut être représentée dans cet intervalle par un polynôme de degré $\leq m$, convenablement choisi, avec une approximation*

$$\rho_n \leq \Psi_1(r) \frac{M_r}{m^r}.$$

Cette fonction Ψ_1 est effectivement égale à $e^r \psi_1$, où ψ_1 est la fonction définie dans le théorème rappelé (n° 37).

Enfin nous pouvons énoncer un dernier théorème, qui se déduit du précédent comme le théorème IV de III, au numéro précédent :

THÉOREME VI. — *Quel que soit l'entier $m > r$, une fonction $f(x)$, dont la dérivée d'ordre r admet le module de continuité $\omega_r(\delta)$, peut être représentée dans l'intervalle $(-1, +1)$ par un polynôme convenable de degré $\leq m$ avec une approximation*

$$\rho_n \leq [\Psi_1(r) + \Psi_1(r+1)] \frac{\omega_r\left(\frac{1}{m}\right)}{m^r},$$

où Ψ_1 est la fonction de r seul définie dans le théorème précédent.

En particulier, si $f^{(r)}(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α , on peut assigner une constante M par rapport à n , telle que l'on ait, quel que soit n ,

$$\rho_n \leq \frac{M}{n^{r+\alpha}}.$$

(1) C'est M. D. Jackson qui a construit le premier des polynômes donnant une approximation de l'ordre indiqué ici. C'est lui aussi le premier qui a montré que les coefficients analogues à Ψ_1 ne dépendent que de r (*Dissertation inaugurale*, Satz IV a, p. 40). Toutefois, il n'a pas étendu ce dernier résultat à la représentation trigonométrique. Les résultats de sa Thèse ont été précisés dans un Mémoire plus récent : *On approximation by trigonometric Sums and polynomials* (*Trans. of the Amer. math. Society*, 1912).

Dans le cas plus particulier où $z = 1$, ce théorème est dû par M. Dunham Jackson ⁽¹⁾.

§2. Le problème inverse. La question de remonter de l'approximation par polynômes aux propriétés de la fonction se ramène au même problème concernant la fonction trigonométrique, donc aux théorèmes énoncés dans le chapitre précédent. Nous ne reprendrons pas cette question et nous nous bornerons à quelques énoncés. L'approximation de $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ par un polynôme de degré n est la même que celle de $f(\sin t)$ par une expression trigonométrique d'ordre n . On

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{\sin t} \frac{d}{dt}.$$

On en conclut, Q_k désignant un polynôme en $\sin t$

$$f^{(r)}(x) = \frac{1}{\sin^r t} \sum_{k=1}^r \varphi_k(t) Q_k \quad (-1 < x < 1), \quad \sum_{k=1}^r \varphi_k(t) = 0.$$

Ainsi l'existence et la continuité des dérivées de $f(x)$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ entraînent celles des dérivées de $f(\sin t)$ d'ordre r , dans le même intervalle, sauf aux limites 0 et π qui admet un module de continuité de l'une des formes

$$\omega(\delta) = M \delta^\alpha, \quad \omega(\delta) = M \sqrt{\delta} \log \frac{1}{\delta},$$

le module de continuité de $f^{(r)}(x)$ vérifiera une même forme dans tout intervalle intérieur (au sens étroit). Seule la valeur de la constante M peut changer. Or, que tout intervalle fini (a, b) se transforme en $(-1, +1)$ par substitution linéaire, qui n'altère pas les propriétés de continuité. Il résulte de là que les théorèmes III et IV et V du chapitre précédent entraînent les théorèmes correspondants.

THÉORÈME VII. *Si, dans un intervalle (a, b) , une dérivée continue d'ordre r qui satisfait au module de Lipschitz d'ordre α ($\alpha > 1$), alors, qu'on ait $\alpha > r$, $f(x)$ peut être (en vertu du théorème VI) repré-*

⁽¹⁾ *Dissertation inaugurale*, Satz II, p. 11.

polynôme de degré $\leq n$ avec une approximation

$$\varrho_n < \frac{M}{n^{r+\alpha}} \quad (M \text{ const.}).$$

Réciproquement, si l'on peut vérifier cette condition, quel que soit n , alors $f(x)$ admet, dans tout intervalle intérieur à (a, b) , une dérivée continue d'ordre r qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α ⁽¹⁾.

Le cas où $\alpha = 1$ est exclu et fait exception. La réciprocité n'est plus complète. Dans ce cas, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — Si, quel que soit n , $f(x)$ peut être représenté dans l'intervalle (a, b) par un polynôme d'ordre $\leq n$ avec une approximation

$$\varrho_n < \frac{M}{n^{r+1}} \quad (M \text{ const.}),$$

alors $f(x)$ possède, dans tout intervalle donné intérieur à (a, b) , une dérivée d'ordre r , qui admet le module de continuité

$$\omega(\delta) = h \delta |\log \delta| \quad (h \text{ const.}).$$

La seconde Partie du théorème VII (partie réciproque) est due, en grande partie, à M. Bernstein. Ce savant géomètre a, en effet, démontré, dans la même hypothèse, l'existence de toute condition de Lipschitz d'ordre $\leq \alpha$ ⁽²⁾. Il a aussi signalé les exceptions qui se produisent dans le cas $\alpha = 1$ ⁽³⁾. M. Bernstein traite directement la représentation par polynômes, mais la représentation trigonométrique donne lieu à des théorèmes plus simples et il est plus avantageux de traiter celle-ci pour commencer. C'est ce que nous avons fait.

⁽¹⁾ M. P. Montel vient d'établir (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1919) un théorème analogue. Il remplace seulement la propriété de vérifier une condition de Lipschitz d'ordre α par celle d'admettre des dérivées généralisées de Liouville de tous les ordres $\leq \alpha$. On doit, par conséquent, en conclure qu'une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre α admet des dérivées de tout ordre $\leq \alpha$. Ce théorème a été énoncé récemment par M. Hermann Weyl (*Vierteljahrsschrift de Zurich*, 1917). Je dois ce dernier renseignement à une communication obligeante de M. Montel.

⁽²⁾ Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues

CHAPITRE VI.

POLYNOME D'APPROXIMATION MINIMUM

53. Polynome de Lagrange. On sait qu'un degré $\leq n$ est complètement déterminé par les $n+1$ valeurs arbitraires, qu'il prend en $n+1$ points donnés x_i . Nous supposons généralement que ces valeurs sont données par une fonction donnée $f(x)$. Alors le polynôme de degré $\leq n$, qui prend les mêmes valeurs que $f(x)$ en $n+1$ points donnés, s'exprime par une formule classique connue sous le nom de *formule de Lagrange*. Cette formule est la suivante :

$$P(x) = S(x) \sum_{i=0}^n \frac{1}{x - x_i} \frac{f(x_i)}{S'(x_i)},$$

où $S(x)$ est le polynôme de degré $n+1$

$$S(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

L'exactitude de cette formule se vérifie immédiatement par les conséquences suivantes, qui nous seront utiles.

1° Si un polynôme variable de degré $\leq n$ est déterminé par $n+1$ points donnés (donc *a fortiori* s'il est borné dans tous ses coefficients sont bornés).

2° Un polynôme variable de degré $\leq n$ qui prend des valeurs infiniment petites en $n+1$ points donnés, a tous ses coefficients infiniment petits.

3° Deux polynômes variables de degré $\leq n$ qui prennent des valeurs infiniment voisines en $n+1$ points donnés, ont des coefficients de même rang infiniment voisins et ces polynômes sont infiniment voisins.

§4. Approximation minimum dans un intervalle. — Soient $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) et

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

un polynome de degré n à coefficient réels. Considérons ce polynome, supposé donné, comme une expression approchée de $f(x)$ dans (a, b) . La différence, positive ou négative,

$$P(x) - f(x),$$

est l'écart au point x . Le maximum de la valeur absolue de l'écart dans l'intervalle (a, b) est l'approximation fournie par P dans cet intervalle.

Considérons maintenant l'ensemble de tous les polynomes de degré $\leq n$. Chacun d'eux représente $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) avec une approximation qui lui correspond, ρ' . La borne inférieure de ρ' pour cet ensemble est un nombre positif ou nul. Cette borne est l'approximation minimum ou la meilleure approximation d'ordre n . Nous la désignerons par ρ . Nous allons prouver qu'il existe un polynome de degré $\leq n$ et un seul qui fournit cette approximation ρ : c'est le polynome d'approximation minimum dans (a, b) pour l'ordre n .

§5. Existence du polynome d'approximation minimum ⁽¹⁾. — Il existe un polynome $P(x)$ de degré $\leq n$ qui réalise l'approximation minimum ρ .

Par définition de ρ , on peut assigner une suite de polynomes $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$ de degré $\leq n$, tels que les approximations correspondantes $\rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_k, \dots$ tendent vers ρ . Dans ce cas, la suite P_1, P_2, \dots tend uniformément vers $f(x)$ dans (a, b) . Donc ces polynomes sont bornés dans (a, b) (quel que soit leur indice) et, par conséquent, tous leurs coefficients sont bornés aussi et de module inférieur à un nombre fixe M (§3). Donc de la suite infinie P_1, P_2, \dots , on peut extraire une suite P'_1, P'_2, \dots , infinie

(1) TCHEBYCHEFF, qui a introduit cette notion, a admis sans démonstration l'existence du polynome d'approximation minimum. Celle-ci a été démontrée par M. E. BOREL [Leçons sur les fonctions de variables réelles, 1905. Voir aussi KIRSCHBERGER, Ueber Tchebycheff Annäherungsmethode (Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1902)].

aussi, telle que le coefficient de x^n ait une limite P'_2, \dots on peut extraire une suite P_1, P_2, \dots tel que le coefficient de x^{n-1} ait une limite, et ainsi de suite. La suite P formera une suite de polynômes ayant une limite P qui réalise l'approximation minimum $\frac{1}{2}$. Nous verrons dans le numéro suivant, que ce polynôme est unique. Nous allons maintenant connaître les propriétés les plus caractéristiques.

§6. Propriétés du polynôme d'approximation minimum dans un intervalle (a, b) . — 1^{re} Si le polynôme P de degré n est d'approximation minimum dans l'intervalle (a, b) , on peut assigner $n+2$ points de l'intervalle (a, b) , où P atteint ses valeurs extrêmes $\pm \frac{1}{2}$; supposons qu'il y ait une alternance de signes d'un point au suivant ⁽¹⁾.

Considérons l'écart variable

$$\varphi(x) = f(x) - P(x)$$

Comme il est fonction continue de x , on peut diviser l'intervalle (a, b) en intervalles consécutifs assez petits pour que $\varphi(x)$ s'annule dans aucun des intervalles ou il atteigne ses valeurs extrêmes $\pm \frac{1}{2}$. Soit

$$a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$$

la suite de ces intervalles où $\varphi(x)$ atteint l'une de ses valeurs extrêmes, et soit

$$1, 2, 3, \dots, n+2$$

la suite des unités du signe de $\varphi(x)$ dans chacun de ces intervalles. L'énoncé revient à dire que cette dernière suite a au moins $n+1$ variations de signes. Je vais prouver que si elle n'en avait moins, P ne serait pas d'approximation minimum.

Si tous les termes de la suite étaient de même signe, on pourrait donner à P sa borne $+\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$ avec le même signe par rapport à $f(x)$. On pourrait alors ajouter à P une constante très petite de ce signe pour améliorer l'approximation.

Supposons donc que la suite $1, 2, 3, \dots, n+2$ contienne

(1) E. BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*.

de deux termes consécutifs de signes contraires. Soit $\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}$ l'un quelconque de ces groupes. Les deux intervalles correspondants δ_i, δ_{i+1} ne sont pas contigus (φ ne s'annulant dans aucun des deux). Nous pouvons donc assigner un point ξ intermédiaire entre δ_i et δ_{i+1} , limites exclues. Soit

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$$

la suite des points ξ ainsi choisis et correspondant aux k groupes consécutifs. Formons le polynome de degré $\leq n$:

$$\psi(x) = \varepsilon_1(\xi_1 - x)(\xi_2 - x) \dots (\xi_k - x),$$

où ε_1 désigne, comme précédemment, l'unité du signe de φ dans δ_1 . Ce polynome aura le signe de φ dans chacun des intervalles $\delta_1, \delta_2, \dots$ et ne s'y annulera pas. Ceci fait, soit ε un nombre positif, je dis que le polynome de degré $\leq n$,

$$P + \varepsilon\psi,$$

fournira dans (a, b) une approximation $< \rho$, pourvu que ε soit suffisamment petit.

En effet, soit $\rho' < \rho$ la borne de $|\varphi|$ dans les intervalles autres que $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$. On obtiendra le résultat demandé, en prenant ε assez petit pour que $|\varepsilon\psi|$ soit $< \rho - \rho'$ dans (a, b) . La valeur absolue de l'écart dû à $P + \varepsilon\psi$, à savoir

$$|f - P - \varepsilon\psi| = |\varphi - \varepsilon\psi|,$$

sera effectivement $< \rho$ dans les intervalles $\delta_1, \delta_2, \dots$ où φ et ψ sont de même signe; elle le sera encore dans les autres, car on aura, dans ceux-ci,

$$|\varphi - \varepsilon\psi| = |\varphi| + |\varepsilon\psi| < \rho' + (\rho - \rho') < \rho.$$

2° *Le polynome d'approximation minimum est unique.*

En effet, soient P et Q deux polynomes de degrés $\leq n$, fournissant l'approximation minimum ρ . Le polynome, de degré $\leq n$,

$$R = \frac{P + Q}{2},$$

fournit une approximation $\leq \rho$, car on a

$$f - R = \frac{1}{2}(f - P) + \frac{1}{2}(f - Q).$$

Donc R est un nouveau polynôme d'approximation et $|f - R|$ atteint ρ en $n + 2$ points, en vertu de ce qui n'est possible que si, en ces points, $f' = P$ et f' change simultanément et avec le même signe leurs valeurs. Alors P et Q , prenant la même valeur en $n + 2$ points consécutifs, sont identiques.

3° La propriété 1° caractérise le polynôme d'approximation minimum. En effet, soit Q un polynôme d'approximation tel que l'écart $f - Q$ atteigne son maximum absolu ρ' d'un ou de signes en $n + 2$ points consécutifs de l'intervalle (a, b) ; alors $\rho' = \rho$ et, en vertu de 2°, Q est identique à P .

Si ρ' était $> \rho$, le polynôme de degré n

$$P - Q + (f - Q) = (f - P)$$

aurait le signe de $f - Q$ aux points où cet écart changerait donc $n + 2$ fois de signe et aurait $n + 3$ points au moins, ce qui est impossible.

§7. Borne inférieure de l'approximation minimum. — Soit P un polynôme de degré n ; si $f - P$ est de signe constant en $n + 2$ points consécutifs de l'intervalle (a, b) , et si, à chacun de ces points, $f - P$ a une valeur absolue ρ' , on a $\rho' \leq \rho$. En d'autres termes, ρ' est une borne inférieure de l'approximation minimum (1).

La démonstration est identique à celle qu'on vient de donner pour la proposition 3° qui précède.

Il y a lieu d'observer que si l'écart $f - Q$ est de signes alternés en $n + 2$ points consécutifs de l'intervalle (a, b) , l'approximation minimum sera intermédiaire entre la plus grande et la plus petite valeur absolue de l'écart sur cet ensemble de points. On peut donc, pour l'approximation fournie par Q dans (a, b) tout entier,

§8. Approximation minimum d'ordre n sur un intervalle (a, b) en $n + 2$ points (2). — Il est utile, pour préciser les

(1) G. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur les polynômes d'approximation minimum* (Bull. de l'Académie des Sciences, n° 12, 1910. Théorème n° 15).

(2) G. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Mémoire cit.*

polynome d'approximation d'ordre n dans un intervalle, de définir et d'étudier le polynome d'approximation dans un ensemble de $n + 2$ points de cet intervalle.

Considérons donc un ensemble E de $n + 2$ points de l'intervalle (a, b)

$$(E) \quad x_0 < x_1 < x_2, \quad \dots, \quad x_n < x_{n+1}$$

et une fonction $f(x)$ qui prend des valeurs déterminées en chacun de ces points. Je vais montrer que, parmi les polynomes d'ordre $\leq n$, il en est un qui donne la meilleure approximation de $f(x)$ pour l'ensemble des points de E . Ce polynome est, pour l'ordre n , le polynome d'approximation de $f(x)$ sur l'ensemble E , et je vais encore montrer que ce polynome est unique.

Par définition, ce polynome $P(x)$ est celui qui minimise le plus grand des écarts absolus

$$|f(x_i) - P(x_i)| \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n+1).$$

Nous allons montrer qu'il se détermine par des calculs purement algébriques.

Proposons-nous d'abord de déterminer un polynome

$$Q = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n,$$

de degré n , et l'approximation correspondante ρ' , par la condition que les écarts aux points de E soient entre eux dans un rapport assigné, à savoir celui des nombres

$$u_0, \quad -u_1, \quad +u_2, \quad \dots, \quad \pm u_{n+1},$$

et soient, de plus, du même signe que ces nombres.

Nous supposons que u_0, u_1, \dots , sont des nombres positifs ou négatifs de module < 1 , mais l'un au moins de module 1. Nous avons placé des signes alternés devant ces nombres pour la commodité des calculs ultérieurs. Si donc ρ' est l'approximation obtenue avec Q sur E , les écarts aux points consécutifs de E sont

$$u_0 \rho', \quad -u_1 \rho', \quad +u_2 \rho', \quad \dots, \quad \pm u_{n+1} \rho'.$$

Dans ce cas, ρ' et les $n + 1$ coefficients α de Q sont déterminés

tous les u de même signe (donc celui du numérateur) et en leur donnant la valeur absolue maximum 1. Donc l'approximation minimum sur E est donnée par la formule

$$(2) \quad \rho = \frac{|A_0 f_0 - A_1 f_1 + \dots \pm A_{n+1} f_{n+1}|}{A_0 + A_1 + \dots + A_{n+1}}.$$

Alors le polynôme d'approximation sur E est entièrement déterminé, car on connaît ses valeurs aux $2n+2$ points de E. D'après le calcul qui précède, ce polynôme est entièrement caractérisé par la propriété de fournir des écarts égaux et de signes contraires en deux points consécutifs de E.

Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant :

Il existe un polynôme P d'ordre $\leq n$ et un seul qui est d'approximation minimum sur E. Ce polynôme fournit des écarts de même valeur absolue et de signes contraires en deux points consécutifs de E et cette propriété le caractérise. Il n'y a d'exception que si la représentation est exacte et l'approximation nulle.

§9. Théorème. - Si $f(x)$ admet dans l'intervalle (a, b) une dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ continue et de module $< M$ et que sa meilleure approximation sur l'ensemble E_0 formé de $n+2$ points x_0, x_1, \dots, x_{n+1} de cet intervalle soit ρ_0 , alors le plus petit écart δ de deux points de E_0 satisfait à la condition

$$\delta \geq \frac{(n+1)!}{(b-a)^n} \frac{2\rho_0}{M}.$$

Transformons l'expression (2) de ρ_0 . Soient π le produit de toutes les distances de deux points de E , π_k celui des seules distances de x_k aux autres points. On a

$$A_k = \pi : \pi_k,$$

d'où

$$\rho_0 = \frac{\left| \frac{f(x_0)}{\pi_0} - \frac{f(x_1)}{\pi_1} + \dots \pm \frac{f(x_{n+1})}{\pi_{n+1}} \right|}{\frac{1}{\pi_0} + \frac{1}{\pi_1} + \dots + \frac{1}{\pi_{n+1}}}.$$

Supposons $x_0 < x_1 < x_2 \dots$. L'approximation de $f(x)$ est la même que celle de $f(x) - f(x_0)$. Substituons cette fonction

à $f(x)$ dans la formule précédente et supprimons le terme du dénominateur, ce qui augmente le quotient

$$\rho_0 \leq \frac{\left| \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\omega_1} - \dots - \frac{f(x_{n-1}) - f(x_0)}{\omega_{n-1}} \right|}{\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \dots + \frac{1}{\omega_{n-1}}}$$

Soit $E_1(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ l'ensemble obtenu en supprimant le premier point de E_0 . Désignons par $\omega_1, \omega_2, \dots$ les produits de distances de deux points de E_1 et posons

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En observant que $x_i - x_0$ est de même signe et pour tous les indices i , la formule précédente peut s'écrire

$$\rho_0 \leq \frac{\left| \frac{f_1(x_1)}{\omega_1} - \dots - \frac{f_1(x_{n-1})}{\omega_{n-1}} \right|}{\frac{1}{(x_1 - x_0)\omega_1} + \dots + \frac{1}{(x_{n-1} - x_0)\omega_{n-1}}} \\ \leq (b-a) \frac{\left| \frac{f_1(x_1)}{\omega'_1} - \dots - \frac{f_1(x_{n-1})}{\omega'_{n-1}} \right|}{\frac{1}{\omega'_1} + \dots + \frac{1}{\omega'_{n-1}}},$$

ou, plus simplement, en désignant par ρ_1 la meilleure approximation d'ordre $n-1$ de f_1 sur E_1 ,

$$\rho_0 \leq (b-a)\rho_1.$$

Il y a là un procédé de réduction qu'on peut répéter. Posons, en général,

$$f_k(x) = \frac{f_{k-1}(x) - f_{k-1}(x_{k-1})}{x - x_{k-1}},$$

et soit ρ_k la meilleure approximation d'ordre $n-k$ de f_k sur l'ensemble $E_k(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})$, nous avons, pour $k = 1, 2, \dots, n$,

$$\rho_{k-1} \leq (b-a)\rho_k,$$

et, par conséquent, de ce qui précède on conclut que

Ici ρ_n est la meilleure approximation d'ordre n de f_n sur l'ensemble de deux points seulement $E_n(x_n, x_{n+1})$; nous avons donc immédiatement

$$\rho_n = \frac{1}{2} |f_n(x_{n+1}) - f_n(x_n)|.$$

Soit, en général, M_k^r le module maximum de $f_k^{(r)}$ sur (a, b) ; nous avons

$$\rho_n < \frac{1}{2} (x_{n+1} - x_n) M_n^1$$

et, par conséquent,

$$\rho_0 < (x_{n+1} - x_n) \frac{1}{2} (b - a)^n M_n^1.$$

Évaluons maintenant M_k^r . Nous avons

$$f_k(x + x_{k-1}) = \frac{f_{k-1}(x + x_{k-1}) - f_{k-1}(x_{k-1})}{x} = \int_0^1 f'_{k-1}(x_{k-1} + ux) du,$$

$$f_k^{(r)}(x + x_{k-1}) = \int_0^1 f_{k-1}^{(r+1)}(x_{k-1} + ux) u^r du.$$

Nous en concluons, par le théorème de la moyenne,

$$M_k^r < M_{k-1}^{r+1} \int_0^1 u^r du = \frac{1}{r+1} M_{k-1}^{r+1};$$

puis, de proche en proche,

$$M_n^1 < \frac{M_n^2}{2} < \frac{M_n^3}{2 \cdot 3} \dots < \frac{M_0^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{(n+1)!}.$$

Finalement, si nous portons cette dernière valeur dans la borne assignée à ρ_0 , nous obtenons

$$\rho_0 < (x_{n+1} - x_n) \frac{(b-a)^n M}{2(n+1)!}.$$

Dans ce calcul, nous avons fait la réduction des ensembles E_0, E_1, E_2, \dots en supprimant chaque fois le point extrême sur la gauche. Nous pourrions tout aussi bien supprimer le point extrême sur la droite et même tantôt celui de gauche, tantôt celui de droite. Si la suppression porte d'abord i fois sur la gauche, ensuite $n-i$ fois sur la droite, nous obtiendrons, quel que soit l'indice i ,

$$\rho_0 < (x_{i+1} - x_i) \frac{(b-a)^n M}{2(n+1)!},$$

ce qui revient au théorème énoncé.

60. Corollaire. — Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle E , d'autre part, pour l'ordre n , φ est la meilleure approximation de $f(x)$ sur l'ensemble E , formé de $n+2$ points, on peut en conclure une borne inférieure de l'écart de f aux points de E , pourvu que φ soit $\neq 0$.

En effet, soit ε un nombre positif donné < 1 . Nous construisons un polynôme Q tel qu'on ait, sur tout (a, b) ,

$$|f - Q| = \varphi.$$

La meilleure approximation d'ordre n de Q sur E est

$$\varphi_0 \leq (1 - \varepsilon) \varphi.$$

Alors, en vertu du théorème précédent, le plus grand écart de Q à deux points de E est supérieur à

$$\frac{\varepsilon(n+1)^{1/2}}{(b-a)^{n+1}} M^{1/2} \varphi,$$

où M est le module maximum de Q^{n+1} .

61. Théorème. — Soient $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) , E un ensemble de $n+2$ points de E , P la meilleure approximation de $f(x)$ de degré $< n$ qui donne la meilleure approximation de $f(x)$ sur E . A tout nombre positif donné ε , on peut trouver un nombre positif ε' qui jouit de la propriété suivante : tout polynôme Q de degré $< n$ donne sur E une approximation de $f(x)$ qui satisfait à la condition

$$|f - Q| \leq \varepsilon' + (1 - \varepsilon) \varphi,$$

on aura, dans l'intervalle (a, b) ,

$$|P - Q| \leq \varepsilon.$$

Si $\varphi = 0$, on a aussi $\varepsilon' = 0$; donc P et Q coïncident.

Supposons φ différent de 0. Nous pouvons désigner les points de E par

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+2},$$

où le signe ambigu est celui de l'écart de P . Substituons leurs valeurs (1) et (2) dans la condition $|f - Q| \leq$

devient

$$A_0 u_0 + A_1 u_1 + \dots + A_{n+1} u_{n+1} > \frac{A_0 + A_1 + \dots + A_{n+1}}{1 + \varepsilon},$$

d'où

$$A_0(1 - u_0) + A_1(1 - u_1) + \dots < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} (A_0 + A_1 + \dots);$$

et, par conséquent, quel que soit k ,

$$1 - u_k < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{A_0 + A_1 + \dots}{A_k}.$$

On peut, en prenant ε suffisamment petit, rendre u_k (qui est ≤ 1) aussi voisin qu'on veut de 1, donc rendre l'écart de Q au point x_k aussi voisin qu'on veut de celui de P . Ainsi Q peut être rendu aussi voisin qu'on veut de P sur E , donc sur (a, b) , et Q peut être astreint à vérifier l'inégalité $|P - Q| < \eta$.

Remarque. — On peut appliquer le théorème précédent quand l'ensemble E varie d'une certaine manière dans (a, b) . Le nombre ε (qui dépend de η) peut alors dépendre du choix des points de E . Mais on pourra le prendre indépendant de E , si l'écart de deux points de E ne peut pas tendre vers zéro. En effet, A_1, A_2, \dots ne tendent pas vers zéro non plus, $1 - u_k$ tend uniformément vers zéro avec ε et Q tend uniformément vers P sur E et, par conséquent, aussi sur (a, b) . Cette condition sera certainement remplie, en vertu du corollaire précédent, si l'on sait que φ reste supérieur à un nombre positif assigné quand E varie.

62. Théorème. — Si un polynome Q de degré $\leq n$ fournit sur $E(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ des écarts de signes alternés, dont les valeurs absolues (non toutes égales) sont

$$r_0, r_1, \dots, r_{n+1},$$

la meilleure approximation sur E est comprise entre la plus petite et la plus grande de ces valeurs absolues, limites exclues.

La meilleure approximation de la fonction f est la même que celle de $f - Q$, à savoir

$$\rho = \frac{A_1 r_0 + A_1 r_1 + \dots + A_{n+1} r_{n+1}}{A_0 + A_1 + \dots + A_{n+1}},$$

63. Meilleure approximation d'ordre n sur un ensemble de $n + 2$ points. — La meilleure approximation sur un ensemble fini F de plus de $n + 2$ points, est la meilleure approximation sur un ensemble de $n + 2$ points de F , choisis de manière que cette meilleure approximation soit la plus grande possible.

Soient E un ensemble de $n + 2$ points, x_0, x_1, \dots, x_{n+1} , une partie de F et satisfaisant à cette condition : P le polynôme de la meilleure approximation, φ , sur E . Je dis que P est la meilleure approximation φ sur F .

En effet, dans le cas contraire, il existerait au moins un point de F où l'écart $f - P$ serait de module $> \varphi$. Si ξ est un tel point, deux points consécutifs de E , x_0 et x_1 par exemple, ont le même signe qu'au point ξ , soit en x_0 , soit en x_1 . Alors, en vertu du théorème précédent, la meilleure approximation sur $(x_0, \xi, x_2, \dots, x_{n+1})$ est plus grande que φ , contrairement à l'hypothèse.

Si ξ est extérieur à l'intervalle (x_0, x_{n+1}) , par exemple à gauche, on considérera l'un des deux ensembles de $n + 2$ points

$$(\xi, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \text{ ou } (\xi, x_0, x_1, \dots, x_n)$$

selon que $f - P$ prend le même signe ou des signes opposés en x_0 . On sera conduit à la même conclusion.

64. Théorème. — La meilleure approximation sur un ensemble E de la fonction continue $f(x)$ dans un intervalle (a, b) , est la meilleure approximation sur un ensemble de $n + 2$ points de cet intervalle, choisis de manière que cette meilleure approximation soit la plus grande possible.

La meilleure approximation φ_1 sur un ensemble

$$E_1(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$$

de $n + 2$ points de (a, b) est donnée par la formule (1). Celle-ci met en évidence que φ_1 est une fonction continue de x_0, \dots, x_{n+1} dans (a, b) . Cette fonction admet donc une limite et l'atteint pour un ensemble déterminé E contenu dans (a, b) . Alors on montre, par un raisonnement identique

précédente, que ρ est aussi l'approximation minimum (a, b).

ainsi démontré l'existence du polynôme d'approximation et retrouvé ses propriétés essentielles par une méthode différente de celle utilisée au début du chapitre (nos 55

me. — Soit $f(x)$ une fonction continue dans (a, b) et P un polynôme de degré $\leq n$ qui en donne la meilleure approximation. Pour tout nombre positif η correspond un nombre ε qui jouit de la propriété suivante : Si un polynôme Q donne sur (a, b) une approximation

$$\rho' = (1 + \varepsilon)\rho,$$

alors sur l'intervalle (a, b) ,

$$|P - Q| < \eta.$$

Or P est la meilleure approximation sur un certain ensemble de $2n + 2$ points et elle est fournie par P. Or Q est une approximation ρ' . Ce théorème revient donc à ce qui précède.

Approché du polynôme d'approximation minimum. — Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) . Il s'agit de trouver, avec une approximation donnée η , le polynôme de degré $\leq n$ qui en donne la meilleure approximation ρ . Il n'y a pas de méthode pratique pour résoudre ce problème. Mais nous allons montrer que *théoriquement* sa solution peut être obtenue en un nombre fini d'opérations, qu'on peut délimiter

l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ qui fournissent la meilleure approximation dans (a, b) . Nous utiliserons à cet effet les règles données précédemment.

Soit P un polynôme inconnu de degré $\leq n$ qui fournit la meilleure approximation ρ dans (a, b) . C'est aussi celui d'approximation minimum sur un certain ensemble E (n° 64) de $n + 2$ points inconnus. Le théorème du n° 60 nous permet de

déterminer une borne inférieure δ de l'écart de deux. Cette borne fixée, nous pouvons, sans connaître δ , d'après la remarque du n° 61, faire correspondre un nombre ε tel que, si un polynôme Q donne sur E l'oscillation $\leq (1 + \varepsilon)\rho$, on ait $|P - Q| \leq \eta$.

Soit M le module maximum de f dans (a, b) . Partageons (a, b) en n parties égales. La formule de Lagrange permet d'approximer le module de continuité uniforme à un polynôme Q , de degré $n-1$, par le module ne surpasse pas $2M/n$ sur l'ensemble des n parties de la subdivision. Nous pouvons donc, en prenant l'entier n assez grand, diviser (a, b) en λn parties assez petites pour que l'oscillation de $f - Q$ soit $\leq \varepsilon \rho_0$ dans chacune d'elles.

Ayant divisé (a, b) en λn parties satisfaisant à cette condition, désignons par F l'ensemble des points de subdivision (n° 61) pris) et soit Q le polynôme d'approximation minimum sur F lequel est de module $\leq 2M/n$ et vérifie les conditions du n° 61. Ce polynôme Q se détermine par un nombre limité de points, car il donne la meilleure approximation sur $n + 1$ points choisis de manière à rendre cette meilleure approximation maximum, et il n'y a qu'un nombre limité de choix. On répond à la question et qu'on a $|Q - P| \leq \eta$.

En effet, Q donne sur F une approximation $\leq \rho$; mais, de E tombe entre deux points consécutifs de F , et l'oscillation de $f - Q$ est $\leq \varepsilon \rho_0$. Donc Q donne, sur E , une approximation $\leq \rho + \varepsilon \rho_0 = (1 + \varepsilon)\rho$, ce qui prouve la proposition.

67. Détermination analytique du polynôme d'approximation minimum. — Soient $f(x)$ une fonction admettant une dérivée continue $f'(x)$, et

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

le polynôme qui en donne la meilleure approximation sur l'intervalle (a, b) . Soit

$$E(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}),$$

l'ensemble de $n + 2$ points de (a, b) sur lequel P donne la même meilleure approximation ρ . Supposons d'abord que les $n + 2$ points sont différents de a et de b . Alors $f(x) - P(x)$ est

num en chacun des points de E et nous avons le système de $2n + 2$ équations

$$(1) \quad \begin{cases} f(x_i) - P(x_i) \pm \rho = 0 \\ f'(x_i) - P'(x_i) = 0 \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n+1),$$

qui peut servir à déterminer les $2n + 2$ inconnues du problème : x_0, x_1, \dots, x_{n+1} ; $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ et ρ .

Si E contenait un des points a, b ou tous les deux, cela ferait une ou deux inconnues en moins, mais, en même temps, une ou deux équations seraient à supprimer dans la seconde série. Le problème est donc généralement déterminé.

Si $f(x)$ est un polynome, le système (1) est algébrique. Il peut, comme dans le cas général, admettre un nombre plus ou moins grand de solutions. Mais il n'y en a qu'une seule qui minimise ρ , et c'est celle qui répond à la question. Lorsque le système (1) est algébrique, on peut, pour le résoudre, employer toutes les méthodes particulières d'approximation propres à ce cas.

Le cas général peut être ramené au précédent, comme M. Borel l'a déjà fait observer (1). En effet, soit R un polynome voisin de f . Soient P le polynome qui donne la meilleure approximation ρ de f , Q celui qui donne la meilleure approximation ρ' de R. Je dis que $|P - Q|$ peut être rendu aussi petit qu'on veut avec $|f - R|$. En effet, si $|f - R|$ est $< \varepsilon$ sur (a, b) , Q donne de f une approximation $< \rho + \varepsilon$ sur (a, b) et, en particulier, sur l'ensemble E où P est d'approximation ρ , donc Q est aussi voisin qu'on veut de P (n° 61).

Il suit de là que le calcul approché de P se ramène à celui de la meilleure approximation d'un polynome R suffisamment voisin de f , c'est-à-dire au calcul précédent.

M. Bernstein a fait connaître un théorème qui peut être utile dans la question qui nous occupe, et que nous allons exposer.

68. Théorème de M. Bernstein. — Nous savons que l'approximation minimum sur (a, b) est la même que sur un certain ensemble E de $n + 2$ points, mais il peut y avoir plusieurs ensembles vérifiant cette condition. Nous supposons, dans ce

qui suit, que cet ensemble est unique. Nous distinguons quatre cas suivants : E est de la première classe s'il ne contient ni a ni b , de la seconde s'il contient a seul, de la troisième s'il contient b seul, de la quatrième s'il contient a et b . Nous venons maintenant énoncer le théorème de M. Bernstein (1) :

THÉORÈME. — Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions continues et régulières sur le segment ab , λ un paramètre ($0 \leq \lambda \leq 1$) :

$$f(x, \lambda) = \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda) \psi(x).$$

Désignons par $P(x, \lambda)$ le polynôme d'approximation de $f(x, \lambda)$ sur (a, b) , par E_λ l'ensemble sur lequel l'approximation est précisément l'approximation minimum. L'ensemble E_λ est unique et appartient toujours à la même classe quel que soit λ ; si, en outre, la dérivée seconde de la fonction

$$F(x) = f(x, \lambda) - P(x, \lambda)$$

ne s'annule en aucun point de E_λ , alors les $2n + 2$ conditions du problème, à savoir $\varphi(\lambda)$, les $n + 2$ points x_i et les coefficients α_k sont des fonctions analytiques régulières du paramètre λ sur le segment 01 .

Supposons, pour fixer les idées, que E_λ soit toujours de la première classe. Alors les $2n + 2$ inconnues sont déterminées par le système (1),

$$(1) \quad \begin{cases} F(x_i) \pm \varphi = 0 \\ F'(x_i) = 0 \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n + 1).$$

Formons son jacobien, qui est d'ordre $2n + 2$. Ses premières lignes sont respectivement ($i = 0, 1, 2, \dots, n + 1$)

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial F(x_i)}{\partial x_{n+1}}, \quad \frac{\partial F(x_i)}{\partial \alpha_0}, \quad \dots, \quad \frac{\partial F(x_i)}{\partial \alpha_n}$$

se réduisant à

$$0, \quad 0, \quad \dots, \quad F'(x_i), \quad \dots, \quad 0, \quad 1, \quad x_i, \quad x_i^2, \quad \dots, \quad x_i^n,$$

(1) M. Bernstein formule un énoncé plus général qui s'étend aux exposants non entiers (*Sur la meilleure approximation des fonctions*).

Les $n + 1$ dernières lignes sont ($k = 0, 1, 2, \dots, n + 1$)

$$\frac{\partial F'(x_k)}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial x_{n+1}}, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial \alpha_0}, \quad \dots, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial \alpha_n}, \quad 0,$$

se réduisant à

$$0, \quad 0, \quad \dots, \quad F''(x_i), \quad \dots, \quad 0, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial \alpha_0}, \quad \dots, \quad \frac{\partial F'(x_k)}{\partial \alpha_n}, \quad 0.$$

Ce jacobien est donc

$$J = F''(x_0) \dots F''(x_{n+1}) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n & +1 \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n & -1 \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n & +1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Nous savons que ce déterminant est différent de zéro, car c'est celui dont dépend le calcul de la meilleure approximation sur l'ensemble E. Donc J ne s'annule pas, si les facteurs $F''(x_k)$ ne s'annulent pas. Le théorème est ainsi établi.

Voici maintenant comment le théorème de M. Bernstein s'applique au calcul de la meilleure approximation d'une fonction analytique donnée $\varphi(x)$, dans l'intervalle (a, b) .

On suppose que l'on connaisse la meilleure approximation $p(0)$ d'une fonction analytique $\psi(x)$, voisine de $\varphi(x)$, ainsi que le polynome $P(x, 0)$ et l'ensemble E_0 correspondants. On forme la fonction

$$f(x) = \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda) \psi(x),$$

qui devra satisfaire aux conditions du théorème précédent. On connaît donc, par hypothèses, les valeurs initiales (pour $\lambda = 0$) des $2n + 2$ inconnues du problème, p, α_i, x_k , et il s'agit d'en trouver les valeurs pour $\lambda = 1$, auquel cas $f(x) = \varphi(x)$.

On remarque que les valeurs initiales des dérivées des ordres successifs de p, α_i, x_k par rapport à λ , s'obtiennent, de proche en proche, en dérivant successivement les équations (1) par rapport à λ et posant chaque fois $\lambda = 0$. Les dérivées d'un même ordre s'obtiennent par la résolution d'un système linéaire dont le déterminant J est toujours le même. On peut donc écrire les développements de p, α_i, x_k suivant les puissances de λ par la formule de Maclaurin. Si ces développements convergent pour $\lambda = 1$, le problème est résolu. Dans le cas contraire, on connaît un élément analytique de chacune des fonctions p, α_i, x_k ; ce qui suffit théoriquement pour les déterminer entièrement.

Si la fonction $\psi(x)$ est bien choisie, les développements de Maclaurin seront rapidement convergents, mais il est évident que c'est un tel choix qui fait toute la difficulté de la question.

M. Bernstein a fait la remarque que voici :

Les expressions approchées de P et de ρ , pour $\lambda = 0$, obtenues en bornant la série de Maclaurin à ses deux premiers termes, sont respectivement le polynôme d'approximation minimum et l'approximation minimum de $\varphi(x)$ sur l'ensemble E_0 .

Pour le montrer, dérivons une première fois les $n + 1$ équations du système (1), en observant que $F'(x_i)$ est constant (i = 0, 1, 2, ..., n + 1)

$$\frac{\partial F(x_i)}{\partial \lambda} \pm \rho'(\lambda) = \varphi(x_i) - \psi(x_i) - \frac{\partial P(x_i)}{\partial \lambda} \pm \rho'(\lambda) = 0$$

mais la caractéristique ∂ indique une dérivation dans la direction λ ; les coefficients a seuls sont considérés comme dépendant de λ ; on a donc $\lambda = 0$; il vient, x_i appartenant à E_0 ,

$$\varphi(x_i) - \psi(x_i) - \frac{\partial P(x_i, 0)}{\partial \lambda} \pm \rho'(0) = 0.$$

D'autre part, on a, par hypothèse, sur l'ensemble E_0 ,

$$\psi(x_i) - P(x_i, 0) \pm \rho(0) = 0;$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$\varphi(x_i) - \left[P(x_i, 0) + \frac{\partial P(x_i, 0)}{\partial \lambda} \right] \pm [\rho(0) + \rho'(0)] = 0$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n + 1).$$

Ces équations, relatives à E_0 , mettent en évidence que

$$P(x) + \frac{\partial P(x)}{\partial \lambda}$$

est le polynôme d'approximation minimum de $\varphi(x)$ sur l'ensemble E_0 et que cette approximation est $\rho(0) + \rho'(0)$ au point $\lambda = 0$. Il s'ensuit évidemment que l'on a

$$\rho(1) \geq \rho(0) + \rho'(0).$$

Cette dernière remarque est encore due à M. Bernstein.

CHAPITRE VII.

APPROXIMATION TRIGONOMÉTRIQUE MINIMUM.

(69). **Propriétés des expressions trigonométriques d'ordre n .** —

Les théorèmes relatifs aux polynômes d'approximation minimum s'étendent aux expressions trigonométriques et se démontrent de la même manière. Mais il faut, au préalable, étendre aux expressions trigonométriques les propriétés algébriques des polynômes sur lesquelles reposent les démonstrations. Voici ces propriétés :

1^o *Une expression trigonométrique d'ordre $\leq n$ ne peut avoir plus de $2n$ racines non équivalentes, et cela en tenant compte de l'ordre de multiplicité des racines.*

Cette propriété a été démontrée au n^o 30.

2^o *Deux expressions d'ordres $\leq n$ qui coïncident en $2n + 1$ points non équivalents sont identiques. Autrement dit, une expression trigonométrique d'ordre $\leq n$ est déterminée par ses valeurs en $2n + 1$ points non équivalents.*

En effet, leur différence, ayant $2n + 1$ racines, est identiquement nulle.

3^o *Deux expressions d'ordres $\leq n$ qui ont $2n$ racines non équivalentes communes sont les mêmes à un facteur constant près.*

En effet, soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux expressions d'ordre $\leq n$ ayant $2n$ racines communes et ne s'annulant pas au point a ; la différence

$$P(x)Q(a) - Q(x)P(a)$$

admet les mêmes racines et une de plus a , en tout $2n + 1$ racines, donc elle est identiquement nulle.

4° On peut toujours construire une expression trigonométrique d'ordre n qui admet $2n$ racines arbitraires.

S'il n'y a que deux racines x_1 et x_2 , l'expression d'ordre

$$\sin \frac{x - x_1}{2} \sin \frac{x - x_2}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) + \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right]$$

satisfait à la question.

Si x_1 et x_2 ne sont pas équivalents, ces racines sont équivalentes à $x_1 + \pi$ et $x_2 + \pi$. L'expression change de signe quand x passe par ces valeurs.

S'il y a $2n$ racines données x_1, x_2, \dots, x_{2n} , le nombre pair de facteurs

$$\prod_i \sin \frac{x - x_i}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, 2n)$$

est une expression entière et répond encore à la question.

5° Une expression d'ordre n peut se déterminer par $2n + 1$ valeurs arbitrairement données qu'elle prend en $2n + 1$ points non équivalents, et elle s'exprime par une formule analogue à celle de Lagrange.

Désignons les points par $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ et soit f_i la valeur assignée au point x_i . Formons l'expression (celle-ci est entière car le nombre des facteurs est impair)

$$S(x) = \prod_i \sin \frac{x - x_i}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, 2n+1)$$

l'expression entière d'ordre n ,

$$S(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{f_i \prod_{j \neq i} \sin \frac{x - x_j}{2}}{2 \sin \frac{x - x_i}{2} \prod_{j \neq i} \sin \frac{x_i - x_j}{2}}$$

répond à la question et remplace la formule de Lagrange. Cette nouvelle formule conduit, de la même manière, aux conclusions suivantes :

6° Deux expressions d'ordre n qui prennent des valeurs infiniment voisines en $2n + 1$ points donnés, non équivalents, sont infiniment voisines.

7° Une expression d'ordre $\lesssim n$, dont les coefficients sont variables, mais qui est bornée sur un ensemble de $2n + 1$ points donnés, non équivalents, à tous ses coefficients bornés.

70. Expression trigonométrique d'approximation minimum. — L'expression trigonométrique qui donne l'approximation minimum d'une fonction périodique $f(x)$ pour toutes les valeurs réelles de x , possède des propriétés analogues à celles du polynôme d'approximation minimum. La généralisation des définitions et de la plupart des démonstrations est immédiate. Il suffira d'énoncer les théorèmes, quand les démonstrations pourront se calquer sur les précédentes. Voici les principaux de ces théorèmes :

1° Il existe, pour chaque ordre n , une expression trigonométrique d'approximation minimum.

2° Si l'expression $T(x)$ d'ordre $\lesssim n$ est d'approximation minimum pour la fonction périodique $f(x)$, on peut assigner $2n + 2$ points, contenus à l'intérieur d'une même période d'amplitude 2π , où l'écart $f - T$ atteint ses valeurs extrêmes $\pm \varphi$ avec alternance de signes d'un point au suivant.

Il faut ici préciser quelques points de la démonstration.

Divisons une période, c'est-à-dire un intervalle donné d'amplitude 2π , en intervalles assez petits pour que l'écart $\varphi(x) = f - T$ ne s'annule dans aucun des intervalles, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$, où il atteint ses valeurs extrêmes. Désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ les unités du signe de $\varphi(x)$ dans chacun de ces intervalles. Soit δ_{m+1} l'intervalle congru à δ_1 dans la période suivante, et $\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_1$ l'unité du signe de $\varphi(x)$ dans δ_{m+1} . Le théorème énoncé revient à dire que la suite

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1} = \varepsilon_1$$

contient $2n + 2$ variations de signes. D'ailleurs, les termes extrêmes étant les mêmes, elle ne peut en contenir qu'un nombre pair.

Supposons, par impossible, que la suite ne contienne que $2k \lesssim 2n$ variations. Soit $\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}$ l'une quelconque d'entre elles. Assignons un point ξ intermédiaire entre les deux intervalles correspondants δ_i et δ_{i+1} , qui sont nécessairement non contigus.

Soit $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2k}$ la suite des $2k$ points ainsi choisis tous intérieurs à la période. La fonction entière d'ordre

$$\psi(x) = \varepsilon_1 \sin \frac{\xi_1}{\omega} x \sin \frac{\xi_2}{\omega} x \dots \sin \frac{\xi_{2k}}{\omega} x$$

aura le signe de φ dans chaque intervalle $\delta_1, \delta_2, \dots$; il résulte, comme dans le cas des polynômes d'approximation, que l'expression d'ordre $[n, T] \pm \psi$, donnerait une approximation meilleure que T , à condition de donner au nombre T une valeur suffisamment petite.

3° L'expression d'ordre n qui donne la meilleure approximation de $f(x)$ est unique.

4° La propriété 2° est caractéristique : une expression qui fournit des écarts de signes alternés et de module $\leq \delta$ pour l'approximation correspondante en $2n+2$ points contenus à l'intérieur d'une période, n'est autre que l'approximation minimum.

71. Borne inférieure de la meilleure approximation trigonométrique. — À la règle du n° 37 pour les polynômes correspond la règle suivante pour la représentation trigonométrique :

Soient $f(x)$ une fonction de période 2π et S une fonction trigonométrique d'ordre n . Si $f - S$ prend, avec f , des valeurs absolues δ'_i en $2n+2$ points et non équivalents d'une même période, alors δ'_i est la borne inférieure de l'approximation minimum.

72. Meilleure approximation d'ordre n sur un $2n+2$ points. — Les résultats obtenus dans le Chapitre précédent, quant à la représentation par polynômes sur $2n+2$ points, s'étendent à la représentation trigonométrique.

Une expression trigonométrique d'ordre n peut être mise sous la forme

$$R(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{ikx},$$

avec la condition que les coefficients a_k et a'_{-k} soient conjugués pour que R soit réel.

Considérons un ensemble E de $2n + 2$ points,

$$(E) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1} < x_{2n+2},$$

non équivalents et contenus dans une même période 2π . Soit $f(x)$ une fonction; nous allons prouver que, parmi les expressions $R(x)$ d'ordre $\leq n$, il en est une $T(x)$ qui donne la meilleure approximation de $f(x)$ sur l'ensemble E. Cette expression T est dite d'approximation minimum sur E, et nous montrerons qu'elle est unique.

Proposons nous d'abord le problème plus général de déterminer $R(x)$ et l'approximation correspondante φ' sur E, par la condition que les $2n + 2$ écarts aux points successifs de E soient de mêmes signes et dans le même rapport que les $2n + 2$ nombres donnés

$$u_1, -u_2, +u_3, \dots, -u_{2n+2}.$$

Les lettres u désignent des nombres positifs ou négatifs de modules ≤ 1 , mais l'un au moins de module 1. Ils sont précédés d'un signe alternatif pour la commodité des calculs ultérieurs.

Nous avons donc à déterminer φ' et les $2n + 1$ coefficients α de $R(x)$ par les $2n + 2$ équations linéaires

$$f(x_m) = \varphi' + \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{ikx_m} \quad (m = 1, 2, \dots, 2n + 1).$$

Ce système a pour déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 + u_1 & e^{-inx_1i} & e^{-(n-1)x_1i} & \dots & e^{0x_1i} \\ u_2 & e^{-inx_2i} & e^{-(n-1)x_2i} & \dots & e^{0x_2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Soient $A_1, -A_2, +A_3, \dots$ les mineurs relatifs aux éléments de la première colonne. Nous avons

$$D = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \dots + A_{2n+2} u_{2n+2}.$$

Calculons le coefficient A_k . Nous avons, en excluant la lettre x_k ,

$$A_k = \begin{vmatrix} e^{-inx_1i} & e^{-(n-1)x_1i} & \dots & e^{0x_1i} \\ e^{-inx_2i} & e^{-(n-1)x_2i} & \dots & e^{0x_2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

Désignons par \prod_k un produit qui s'étend à toutes les valeurs de deux indices λ, μ différents de k avec la convention $\lambda < \mu$. Il vient

$$\begin{aligned} \Lambda_k &= e^{-n(x_1 + x_2 + \dots + x_n)} \prod_k (e^{x_k} - e^{-x_k}) \\ &= \prod_k e^{-\frac{x_k^2 + x_\mu^2}{2}} (e^{x_k} - e^{-x_\mu}) \\ &= \prod_k 2i \sin \frac{x_k - x_\mu}{2}. \end{aligned}$$

Désignons encore par ω le nombre des facteurs du déterminant (nombre qui est indépendant de k), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Lambda_k &= (2i)^\omega \Lambda'_k, \\ \Lambda'_k &= \prod_k \sin \frac{x_k - x_\mu}{2}. \end{aligned}$$

Tous les facteurs étant positifs, Λ'_k est un nombre réel.

Réolvons maintenant le système par rapport à ρ' :

$$\rho' = \frac{\Lambda_1 f(x_1) + \Lambda_2 f(x_2) + \dots + \Lambda_{n+2} f(x_{n+2})}{\Lambda_1 u_1 + \Lambda_2 u_2 + \dots + \Lambda_{n+2} u_{n+2}},$$

et, en supprimant le facteur commun $(2i)^\omega$,

$$(1) \quad \rho' = \frac{\Lambda'_1 f(x_1) + \Lambda'_2 f(x_2) + \dots + \Lambda'_{n+2} f(x_{n+2})}{\Lambda'_1 u_1 + \Lambda'_2 u_2 + \dots + \Lambda'_{n+2} u_{n+2}}.$$

Les quantités Λ' sont réelles, positives et non nulles, l'opération précédente, entièrement analogue à la formule (1) du n° 1 pour les polynômes, conduit aux mêmes conséquences.

L'approximation minimum se réalise en faisant ρ égal à ± 1 et du même signe que le numérateur de (1). La valeur minimum ρ sur E sera donnée par la formule

$$(2) \quad \rho = \frac{|\Lambda'_1 f(x_1) + \Lambda'_2 f(x_2) + \dots + \Lambda'_{n+2} f(x_{n+2})|}{\Lambda'_1 + \Lambda'_2 + \dots + \Lambda'_{n+2}}.$$

Ces formules conduisent, comme dans le cas des polynômes, aux théorèmes suivants :

1° Il existe une expression d'ordre n et une autre de degré $n+1$ la meilleure approximation sur un ensemble E , de la fonction f ; elle fournit des écarts de même module et de sig-

en deux points consécutifs de E , et cette propriété la caractérise.

2° L'expression d'ordre $2n$ qui donne la meilleure approximation sur un ensemble F de plus de $2n + 2$ points [ou dans un intervalle (a, b)], est celle qui donne la meilleure approximation sur $2n + 2$ points de F [ou de (a, b)], choisis de manière que cette meilleure approximation soit la plus grande possible.

73. Théorème. — Supposons que $f(z)$, de période 2π , soit une fonction analytique de $z = x + yi$, holomorphe dans la bande comprise entre les deux horizontales $y = \pm b$, et de module $\leq M$ sur ces droites; alors si f a pour meilleure approximation p_0 sur un ensemble E_0 de $2n + 2$ points réels non équivalents, le plus petit écart δ de deux de ces points vérifie la condition

$$\delta \geq p_0 \frac{16}{M} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2} \right)^{2n+2}.$$

Nous pouvons supposer que les points $x_1, x_2, \dots, x_{2n+2}$ de E_0 satisfassent à la condition

$$0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2n+2} < 2\pi.$$

Appelons, en abrégé, *distance de deux points* x_i et x_k de E l'expression

$$\left| \sin \frac{x_i - x_k}{2} \right|$$

et désignons par ϖ_k le produit des distances de x_k aux autres points de E . La formule (2) nous donne

$$\rho_0 = \frac{\left| \frac{f(x_1)}{\varpi_1} - \frac{f(x_2)}{\varpi_2} + \dots + \frac{f(x_{2n+2})}{\varpi_{2n+2}} \right|}{\frac{1}{\varpi_1} + \frac{1}{\varpi_2} + \dots + \frac{1}{\varpi_{2n+2}}}.$$

Soit E_1 l'ensemble obtenu en supprimant l'un des points extrêmes de E_0 , par exemple x_1 ; posons

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{\varpi_1}.$$

accentuons les produits relatifs à E_1 . Nous avons, comme polynômes (n° 59) et en observant que les sinus doubles ≤ 1 ,

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \frac{\left| \frac{f(x_2)}{\sin^2 \frac{x_2}{2}} - \frac{f(x_3)}{\sin^2 \frac{x_3}{2}} + \dots + \frac{f(x_{2n+2})}{\sin^2 \frac{x_{2n+2}}{2}} \right|}{1 - \frac{1}{\sin^2 \frac{x_2}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{x_3}{2}} - \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{x_{2n+2}}{2}}}.$$

Cette fois, le nombre φ_1 , défini par cette formule, est la meilleure approximation de f_1 sur E_1 , parce que le nombre de points de E_1 est impair. Mais cela n'empêche pas la réduction, parce que φ_1 ne change pas quand on remplace, dans cette formule, $f(x)$ par $f(x) + \alpha$. On a, en effet,

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{x_2}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{x_3}{2}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{x_{2n+2}}{2}} = 0,$$

parce que cette somme ne diffère que par un facteur du développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-in-1}x_1i & e^{-n-2}x_1i & \dots & e^{n+1}i \\ 1 & e^{-(n-1)x_1i} & e^{-(n-2)x_1i} & \dots & e^{+1}i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

suivant les éléments de la première colonne. On s'assure par des calculs tout pareils à ceux du n° 72. Or ce déterminant est nul, parce que la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne est identique à la première.

Posons donc, en général,

$$f_k(x) = \frac{f_{k+1}(x) - f_{k+1}(x_{k+1})}{\sin \frac{x - x_{k+1}}{2}}.$$

Désignons par φ_k l'expression analogue à φ_0 et φ_1 , relative à l'ensemble $E_k(x_{k+1}, \dots, x_{2n+2})$, et qui est la meilleure approximation d'ordre $n - \frac{k}{2}$ de $f_k(x)$ sur E_k lorsque k est pair, et

$$\varphi_k = \varphi_{k+1}$$

et, de proche en proche,

$$\varphi_0 = \varphi_{2n}.$$

Ici φ_{2n} est la meilleure approximation d'ordre 0 de f_0 sur l'ensemble de deux points seulement $E_{2n}(x_{2n+1}, x_{2n+2})$.

donc

$$\rho_{2n} = \frac{1}{2} |f_{2n}(x_{2n+2}) - f_{2n}(x_{2n+1})|.$$

Soit, en général, M'_{2n} le module maximum de f'_{2n} sur l'axe réel; il vient ainsi

$$\rho_0 \leq \rho_{2n} \leq (x_{2n+2} - x_{2n+1}) \frac{M'_{2n}}{2}.$$

Il faut maintenant évaluer M'_{2n} . Désignons, en général, par M_k le module maximum de f_k dans la bande comprise entre les horizontales $y = \pm b$, maximum atteint sur ces droites puisque f_k est holomorphe et périodique. La formule

$$f_k(z+1, x_k) = \frac{f_{k-1}(z+1, x_k) - f_{k-1}(z, x_k)}{\sin \frac{1}{2} z}$$

donne immédiatement

$$M_k \leq \frac{2 M_{k-1}}{\operatorname{sh} \frac{1}{2} b};$$

d'où, de proche en proche, M désignant M_0 ,

$$M_{2n} \leq \left(\frac{2}{\operatorname{sh} \frac{1}{2} b} \right)^{2n} M.$$

Pour évaluer la dérivée, désignons par Γ le contour du rectangle compris entre les deux abscisses $x+1-\pi$ et les deux ordonnées $\pm b$. On a, par la théorie des résidus,

$$f_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_{2n}(z) \frac{1}{2} \cot \frac{z-x}{2} dz,$$

$$f'_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_{2n}(z) \frac{dz}{4 \sin^2 \frac{z-x}{2}}.$$

Mais les intégrales sur les côtés verticaux se détruisent (à cause de la périodicité), les intégrales sur les côtés horizontaux $y = \pm b$ subsistent seules; et il vient, par le théorème de la moyenne,

$$M'_{2n} \leq 2 \frac{M_{2n}}{\left(2 \operatorname{sh} \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2}} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}} \right)^{2n} M.$$

On porte cette expression dans la borne de ϱ_0 , il vient

$$\varrho_0 < (x_{2n+2} - x_{2n+1}) \left(\frac{b}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}} \right)^{2n+2} \frac{M}{16}.$$

On peut aussi faire la réduction de l'ensemble en retranchant les points sur la droite, ou encore sur les deux extrémités successivement. On a ainsi, quel que soit i ,

$$\varrho_0 < (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{b}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}} \right)^{2n+2} \frac{M}{16},$$

ce qui revient au théorème énoncé.

74. Corollaire. — Soit $f(x)$ continue et périodique; si sa meilleure approximation d'ordre n est $\varrho = 0$ sur un ensemble E de $2n+2$ points non équivalents, on peut en conclure une borne inférieure de l'écart de deux points de E .

En effet, soit ε un nombre positif < ϱ . Nous pouvons construire une expression trigonométrique S d'un certain ordre, telle qu'on ait, sur l'axe réel,

$$|f - S| = \varrho - \varepsilon.$$

La meilleure approximation d'ordre n de S sur E est donc

$$\varrho_0 \geq \varrho - \varepsilon.$$

Alors, en vertu du théorème précédent, le plus petit écart δ de deux points de E est supérieur à

$$(\varrho - \varepsilon) \frac{16}{M} \left(\frac{1}{5} \operatorname{sh} \frac{b}{2} \right)^{2n+2},$$

où M est le maximum du module de $S(z)$ sur les droites $y = \pm b$. Le choix de b reste arbitraire. On le choisira de manière à rendre cette borne aussi grande que possible.

75. Détermination de la meilleure approximation d'ordre n . — La détermination de la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n , sur l'axe réel, d'une fonction périodique donnée $f(x)$

une analogue à celui de la détermination du polynôme de Tchebicheff à minimum dans un intervalle. Il se résout, à l'altitude assignée, au moyen d'un nombre limité d'opérations. On peut fixer *a priori*. La méthode se justifie, comme pour les polynômes, en s'appuyant sur les théorèmes corrects que nous avons établis ci-dessus. Il est inutile de poser cette question dans le détail.

Il est enfin que le théorème de M. Bernstein (n° 68) s'étend, sans aucune modification, à la représentation trigonométrique, et peut rendre les mêmes services que dans la recherche du polynôme de Tchebicheff à minimum. Cette extension n'a pas été faite par Bernstein, mais elle ne présente aucune difficulté.

Meilleure approximation sur un ensemble de points équi-

Revenons d'abord à la meilleure approximation ρ sur l'ensemble E de $2n + 2$ points

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2n+2},$$

tous extérieurs ou intérieurs à une même période, c'est-à-dire à une période d'origine arbitraire et d'amplitude 2π .

Soit par $S(x)$ l'expression entière

$$S(x) = \sin \frac{x - x_1}{2} \sin \frac{x - x_2}{2} \dots \sin \frac{x - x_{2n+2}}{2}$$

produit, étendu à tous les couples d'indices λ, μ , vérifiant les conditions $\mu < \lambda < 2n + 2$,

$$\prod \sin \frac{x_\lambda - x_\mu}{2};$$

(n° 72)

$$A_k = \prod_{\mu} \sin \frac{x_k - x_\mu}{2} \dots (-1)^k \frac{1}{S'(x_k)}.$$

Le (2), du n° 72, nous donne donc la suivante :

$$\rho = \frac{\frac{f(x_1)}{S'(x_1)} + \frac{f(x_2)}{S'(x_2)} + \dots + \frac{f(x_{2n+2})}{S'(x_{2n+2})}}{\frac{1}{S'(x_1)} + \frac{1}{S'(x_2)} + \dots + \frac{1}{S'(x_{2n+2})}},$$

qui est encore applicable au cas général (que les points soient tous extérieurs ou non).

Arrivons maintenant au cas particulier qui nous intéresse. Supposons que les points de l'ensemble E partagent la période en parties égales, de sorte que l'équidistance des points x_1, x_2, \dots soit $\frac{\pi}{n+1}$. Dans ce cas, $S(x)$ admet les mêmes racines que la fonction

$$\sin(n+1)(x-x_1)$$

et le rapport des deux fonctions est borné, car on vérifie de suite qu'il tend vers une limite finie quand x tend vers l'infini imaginaire. Donc le rapport des deux fonctions est une constante h et l'on a

$$S(x) = h \sin(n+1)(x-x_1).$$

L'équidistance des points étant $\frac{\pi}{n+1}$, on en conclut

$$S'(x_1) = (n+1)h, \quad S'(x_2) = -(n+1)h, \quad \dots$$

Ces valeurs sont de même module et de signes alternés. La valeur de la meilleure approximation ρ se réduit à

$$\rho = \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)| + \dots + |f(x_{2n+2})|}{2n+2}.$$

De là, le théorème suivant :

La meilleure approximation de $f(x)$, de période 2π , par une expression trigonométrique d'ordre n , sur un ensemble de $2n+2$ points $x_1, x_2, \dots, x_{2n+2}$, non équivalents, qui partagent la période en $2n+2$ parties égales, est la moyenne arithmétique des $2n+2$ valeurs $f(x_1), -f(x_2), +f(x_3), \dots, -f(x_{2n+2})$. Cette moyenne est donc une borne inférieure de la meilleure approximation d'ordre n pour x réel quelconque.

Cette moyenne peut être mise sous une forme intéressante qui se rattache à la série de Fourier. Supposons $f(x)$ développable en série de Fourier convergente :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Si nous posons

$$a'_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad a''_k = \frac{a_k + ib_k}{2},$$

écrire

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha'_k e^{kx i}.$$

s maintenant l'ensemble des points équidistants x_1 ,
et supposons d'abord $x_1 = 0$, auquel cas

$$x_m = \frac{(m-1)\pi}{n+1}.$$

$$(-1)^{m-1} f(x_m) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha'_k \sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^{m-1} e^{\frac{(m-1)k\pi i}{n+1}}.$$

multiple impair de $n+1$, on a

$$(-1)^{m-1} e^{\frac{(m-1)k\pi i}{n+1}} = \sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^{m-1} (-1)^{m-1} = 2n+2,$$

autres cas, on a

$$\sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^{m-1} e^{\frac{(m-1)k\pi i}{n+1}} = \frac{e^{2k\pi i} - 1}{\frac{k\pi i}{n+1} - 1} = 0.$$

$$(-1)^m f(x_m) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \alpha'_{(2\lambda+1)(n+1)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \alpha'_{(2\lambda+1)(n+1)}.$$

rème suivant :

*ériodique est développable en série de Fourier
la meilleure approximation trigonométrique
l'ensemble E des $2n+3$ points,*

$$0, \quad \frac{\pi}{n+1}, \quad \frac{2\pi}{n+1}, \quad \dots, \quad \frac{(2n+1)\pi}{n+1},$$

ssion

$$^{(1)} \rho = \alpha_{n+1}^{(1)} + \alpha_{3,n+1}^{(1)} + \alpha_{5,n+1}^{(1)} + \dots,$$

l'ensemble des points équidistants x_1, \dots, x_m de l'ensemble E de la fonction $f(x)$.

Le cas où le premier point de l'ensemble E est x_1 (au lieu de 0) se ramène au précédent par le changement de x en $x + x_1$. Or, on a

$$f(x + x_1) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx_1 + b_k \sin kx_1) \cos kx \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_k \sin kx_1 + b_k \cos kx_1) \sin kx.$$

De là, le théorème suivant :

La meilleure approximation d'ordre n de $f(x)$ sur l'ensemble E des $2n + 2$ points,

$$(E) \quad x_1, \quad x_1 + \frac{\pi}{n+1}, \quad x_1 + \frac{2\pi}{n+1}, \quad \dots, \quad x_1 + \frac{(2n+1)\pi}{n+1},$$

a pour expression

$$\rho = \sum_{\lambda=0}^{\infty} [\alpha_{(2\lambda+1)(n+1)} \cos(\gamma_{(2\lambda+1)(n+1)} x_1 \\ + b_{(2\lambda+1)(n+1)} \sin(\gamma_{(2\lambda+1)(n+1)} x_1)],$$

77. Nouvelle borne inférieure de la meilleure approximation trigonométrique. — Revenons encore une fois à la meilleure approximation ρ pour l'ensemble de toutes les valeurs réelles de x . Le théorème qui termine le numéro précédent en fournit une borne inférieure quel que soit x_1 , et cette borne se présente sous forme d'une série trigonométrique en x_1 . Choisissons x_1 de manière à majorer le premier terme et remplaçons tous les suivants par leur borne inférieure pour x_1 quelconque; nous obtenons le théorème suivant :

La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n pour une fonction périodique, développable en série de Fourier convergente, admet la borne inférieure

$$\sqrt{\alpha_{n+1}^2 + b_{n+1}^2} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sqrt{a_{2\lambda+1, n+1}^2 + b_{2\lambda+1, n+1}^2}$$

pourvu que cette expression soit positive.

les bornes que nous venons de signaler sont distinctes des bornes antérieurement.

Application des résultats précédents à la meilleure approximation par des polynômes. — L'approximation de $f(x)$ par des polynômes de degré n (ou $n+1$) revient à l'approximation trigonométrique de $f(\cos \varphi)$ par des polynômes de degré n (ou $n+1$) sur l'ensemble

$$0, \quad \frac{\pi}{n+1}, \quad \frac{2\pi}{n+1}, \quad \dots, \quad \frac{(2n+1)\pi}{n+1}$$

$$\frac{1}{2} \left[f(\cos 0) - f\left(\cos \frac{\pi}{n+1}\right) + \dots - f\left(\cos \frac{(2n+1)\pi}{n+1}\right) \right].$$

Or, si $f(\cos 0)$ et $f(\cos \pi)$, les termes sont deux à deux égaux et opposés à ceux à égale distance des extrêmes quand on suppose n impair. De là, le théorème suivant :

La meilleure approximation de $f(x)$, par un polynôme de degré n , sur l'ensemble E des $n+2$ points,

$$\cos \frac{\pi}{n+1}, \quad \cos \frac{2\pi}{n+1}, \quad \dots, \quad \cos \frac{n\pi}{n+1}, \quad 1,$$

est donnée par l'expression

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} f(1) - f\left(\cos \frac{\pi}{n+1}\right) + f\left(\cos \frac{2\pi}{n+1}\right) - \dots + f\left(\cos \frac{n\pi}{n+1}\right) - \frac{1}{2} f(-1) \right].$$

Au lieu de cette expression est une borne inférieure de la meilleure approximation dans l'intervalle $(-1, +1)$ on peut aussi lui donner la forme

$$\frac{1}{2} \left[\rho + a_{n+1} + a_{3(n+1)} + a_{5(n+1)} + \dots \right],$$

où ρ est la constante de Fourier de $f(\cos \varphi)$, qui est alors développable en série de Fourier convergente ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ M. Bernstein donne des résultats analogues, sauf quelques inadvertances dans l'ordre de la meilleure approximation des fonctions conti-

79. Exemples simples d'approximation trigonométrique minimum. — L'étude des fonctions analytiques fournit des exemples remarquables d'approximation minimum sur lesquels nous reviendrons plus loin. Mais nous pouvons indiquer, dès maintenant, quelques exemples instructifs.

1° L'expression trigonométrique d'ordre n qui donne la meilleure approximation du terme d'ordre $n+1$,

$$a \cos(n+1)x + b \sin(n+1)x,$$

est identiquement nulle.

En effet, posons $a = r \cos z$, $b = r \sin z$; cette dernière expression prend la forme

$$r \cos(n+1)(x-z).$$

Elle prend $2n+2$ fois ses valeurs extrêmes $\pm r$ avec alternance de signes en des points intérieurs à une même période. Ce sont les valeurs de l'écart pour l'expression approchée $T = 0$. Donc 0 est d'approximation minimum.

2° Le même raisonnement montre que l'on connaît aussi la meilleure approximation d'ordre n pour la fonction d'ordre $n+1$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

L'expression d'approximation minimum est

$$T(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx;$$

L'écart est

$$\varphi(x) = a_{n+1} \cos(n+1)x + b_{n+1} \sin(n+1)x$$

et l'approximation a pour valeur

$$\rho = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2}.$$

3° Un exemple d'un autre genre nous est donné par la fonction sans dérivée de Weierstrass. Nous allons montrer qu'on en connaît les expressions les plus approchées pour tous les ordres (1).

Soient a un nombre positif < 1 et b un nombre entier impair > 1 ;

(1) S. BERNSTEIN, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 25 novembre 1912, p. 1037.

e Weierstrass

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \cos b^m x$$

ne expression d'approximation minimum d'ordre n ,
 les $k+1$ premiers termes de cette série, à savoir

$$T(x) = \sum_{m=0}^k a^m \cos b^m x,$$

terminé par la condition

$$b^k \leq n < b^{k+1}.$$

l'écart, qui a pour expression

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} a^m \cos b^m x,$$

prend ses valeurs extrêmes avec alternance de signe aux
 points consécutifs

$$x_{\lambda} = \frac{\lambda \pi}{b^{k+1}} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots, 2b^{k+1})$$

la relation correspondante est

$$\rho = \sum_{m=k+1}^{\infty} a^m = \frac{a^{k+1}}{1-a}.$$



CHAPITRE VIII.

FONCTIONS ANALYTIQUES PRÉSENTANT DES SINGULARITÉS POLAIRES.

80. Correspondance entre les séries de Fourier et de Laurent.

— Soit $f(z)$ une fonction périodique de la variable complexe $z = x + yi$. Supposons que cette fonction soit holomorphe dans la bande du plan z comprise entre les deux droites $y = \pm b$, parallèles à l'axe réel. Son développement en série de Fourier est de la forme

$$f(z) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Faisons la substitution

$$(1) \quad e^{zi} = t.$$

Cette substitution transforme $f(z)$ dans une fonction $\varphi(t)$ qui est uniforme, à cause de la périodicité.

Quand z varie de 2π sur l'axe réel, t décrit le cercle de centre origine et de rayon 1. Quand z varie de $\pm 2\pi$ sur les droites $y = \pm b$, t décrit les cercles de rayons e^{-b} et e^b . La substitution (1) fait donc correspondre à la bande du plan z comprise entre les deux droites $y = \pm b$, la couronne circulaire du plan t comprise entre les deux cercles de rayons e^{-b} et e^b ; et $\varphi(t)$ est holomorphe dans cette bande.

Par la substitution (1), le terme général du développement de Fourier devient

$$(2) \quad A_k = a'_k t^k + b'_k \frac{1}{t^k},$$

développement de Fourier de $f(z)$ se transforme dans
) suivant les puissances positives et négatives de t ,
 en série de Laurent, convergente dans la couronne
 considérée. Par conséquent, la série de Fourier de $f(z)$
 divergente dans la bande correspondante. Nous allons
 l'ordre de grandeur des coefficients et le degré de con-
 la série.

ème I. — *Si $f(z)$ de période 2π est holomorphe et*
de module soit M dans la bande comprise entre les
droites $y = \pm b$, alors, pour z réel, le module du terme
de la série de Fourier vérifie la condition

$$|A_k| \leq 2Me^{-kb}.$$

dans le terme général (2) du développement de $\varphi(t)$ en
 série de Laurent dans la couronne. Soient G_1 le cercle de rayon e^{-b}
 et G_2 le cercle de rayon e^b qui limitent la couronne. On a

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_1} \frac{\varphi(t)}{t^k} dt, \quad b'_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{G_2} \varphi(t) t^k \frac{dt}{t};$$

d'où,

$$|a'_k| \leq e^{-kb} \frac{M}{2\pi} \int_{G_1} \left| \frac{dt}{t} \right| = Me^{-kb},$$

$$|b'_k| \leq e^{-kb} \frac{M}{2\pi} \int_{G_2} \left| \frac{dt}{t} \right| = Me^{-kb};$$

et, $|A_k|$ ne surpasse pas la somme de ces deux bornes.

ème II. — *Si $f(z)$ est holomorphe et de module M*
dans la bande comprise entre les deux droites $y = \pm b$, la
série de Fourier donne, sur l'axe réel, une approxima-

$$\varphi_n = \frac{2M}{e^b - 1} e^{-nb}.$$

d'où,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2Me^{-nb} = 2M \frac{e^{-n+1}b}{1 - e^{-b}} = 2M \frac{e^{-nb}}{e^b - 1}.$$

singularités polaires. Décomposition de la partie principale

en éléments simples. — Nous allons maintenant étudier comment se comporte la série de Fourier lorsque $f(z)$ admet des singularités polaires sur les droites $y = \pm b$. Nous devons d'abord mettre sous la forme la plus convenable la partie principale de la fonction au voisinage d'un pôle d'ordre r .

La fonction $f(z)$ est supposée réelle avec z ; par conséquent, les pôles sont conjugués deux à deux et, si $z = \alpha + bi$ est un pôle, $z = \alpha - bi$ en est un autre du même ordre. Déterminons la forme de la partie principale de $f(z)$ au voisinage de deux pôles conjugués $\alpha \pm bi$. En changeant au besoin z en $z + \alpha$, ces pôles deviennent $\pm bi$. Considérons les deux fonctions

$$f(z) + f(-z), \quad \frac{f(z) - f(-z)}{\sin z}.$$

Ce sont des fonctions paires de période 2π , donc des fonctions uniformes de $\cos z$. Supposons qu'elles admettent les points $\pm bi$ comme pôles de degré r ; nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{f(z) + f(-z)}{2} &= \frac{A_0}{(\cos z - \cos bi)^r} + \dots + \frac{A_r}{\cos z - \cos bi} + \psi(z), \\ \frac{f(z) - f(-z)}{2 \sin z} &= \frac{B_0}{(\cos z - \cos bi)^r} + \dots + \frac{B_r}{\cos z - \cos bi} + \chi(z), \end{aligned}$$

les fonctions ψ et χ étant holomorphes au voisinage des points $\pm bi$. Multiplions la seconde équation par $\sin z$ et ajoutons; nous obtenons la partie principale de $f(z)$, décomposée en une somme de termes que l'on peut considérer comme des *éléments simples*:

$$\frac{A_0 + B_0 \sin z}{(\cos z - \cos bi)^r} + \frac{A_1 + B_1 \sin z}{(\cos z - \cos bi)^{r-1}} + \dots + \frac{A_r - B_r \sin z}{\cos z - \cos bi}.$$

Si le pôle est d'ordre r , un au moins des coefficients A_0, B_0 n'est pas nul. Si les pôles conjugués sont $z = \alpha \pm bi$, on changera z en $z - \alpha$ dans les formules précédentes.

84. Développement des éléments simples en série de Fourier. — Le développement en série de Fourier de la partie principale de $f(z)$ dans le domaine d'un pôle ne présente aucune difficulté. On l'obtient, comme il suit, presque sans calculs, si le pôle est

b un nombre réel positif; on a

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{1}{1 - e^{zi-b}} &= \frac{1}{(1 - e^{zi-b})(1 - e^{-zi-b})} \\ &= \frac{e^b - e^{-zi}}{e^b + e^{-b} - 2 \cos z} = \frac{\operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b - \cos z + i \sin z}{2(\operatorname{ch} b - \cos z)}. \end{aligned}$$

et là

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{k(zi-b)} = \frac{1}{1 - e^{-zi-b}} = \frac{\operatorname{sh} b + i \sin z}{2(\operatorname{ch} b - \cos z)}$$

et les parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} b}{2(\operatorname{ch} b - \cos z)} &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kb} \cos kz, \\ \frac{\sin z}{2(\operatorname{ch} b - \cos z)} &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kb} \sin kz. \end{aligned}$$

immédiatement de la combinaison de ces deux équations on tire en série de Fourier de l'élément simple du type :

$$\frac{A + B \sin z}{\cos z - \operatorname{ch} b}.$$

Le développement de l'élément simple d'ordre plus élevé est un analogue, mais le calcul se fait par de simples dérivations et donne lieu à aucune difficulté. Posons, pour simplifier,

$$\operatorname{ch} b = m, \quad \frac{db}{dm} = \frac{1}{\operatorname{sh} b};$$

et, en dérivant $r-1$ fois par rapport à m ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m - \cos z)^r} &= \frac{2(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dm^{r-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kb}}{\operatorname{sh} b} \cos kz, \\ \frac{\sin z}{(m - \cos z)^r} &= \frac{2(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dm^{r-1}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kb} \sin kz. \end{aligned}$$

Il est évidemment inutile d'effectuer ces dérivations. Il est plus facile de déterminer la valeur principale des coefficients de $k = \infty$. Or cette valeur est manifestement celle qu'on

obtient en dérivant $m-1$ fois de suite l'exponentielle e^{kb} . On trouve ainsi que les coefficients de $\cos kz$ et de $\sin kz$ ont respectivement pour valeur asymptotique, pour $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{2k^{r-1}e^{-kb}}{(r-1)!(\operatorname{sh} b)^r}, \quad \frac{2k^{r-1}e^{-kb}}{(r-1)!(\operatorname{sh} b)^{r-1}}.$$

Si l'on considère le terme d'ordre k dans le développement de

$$\frac{A + B \sin x}{(\operatorname{ch} b - \cos x)^r},$$

on voit que le maximum de son module pour x réel a pour valeur asymptotique

$$\frac{2\sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}}{(r-1)!(\operatorname{sh} b)^r} k^{r-1} e^{-kb}.$$

Ces diverses expressions sont de l'ordre de $k^{r-1}e^{-kb}$. Cette conclusion subsiste, quelle que soit la position du pôle sur les droites $y = \pm b$, car on passe du cas particulier traité ci-dessus au cas général par le changement de z en $z - \alpha$.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème suivant :

85. Théorème III. — *Si $f(z)$ est holomorphe dans la bande comprise entre les deux droites $y = \pm b$ et n'a, sur ces droites, que des pôles comme points critiques, ceux-ci d'ordre r au plus, alors, pour $z = x$, la somme S_n de Fourier donne une approximation*

$$z_n^{-r} h n^{r-1} e^{-nb},$$

où h est une constante par rapport à n .

En effet, nous pouvons mettre $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = P + \varphi(z),$$

où P est la somme des parties principales relatives aux divers pôles supposés ci-dessus, et $\varphi(z)$ une fonction holomorphe et bornée dans une bande débordant la précédente, comprise par exemple entre les droites $y = \pm (b + \frac{1}{2})$. Le terme général A_k de la série de Fourier de f est la somme des termes du même ordre dans les développements des diverses parties principales qui composent P et dans celui de $\varphi(z)$. En vertu du théorème I, le terme

ordre de $e^{-k(b+\varepsilon)}$, et les termes relatifs aux parties d'ordre de $k^{r-1}e^{-kb}$ au plus. Donc leur somme A_k est d'ordre supérieur à cette dernière expression. On choisit une constante h telle qu'on ait, quel que

$$|A_k| \leq h k^{r-1} e^{-kb}.$$

$$|S_n| \leq h \sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1} e^{-kb}.$$

Ensuite, on passe du terme écrit au suivant en le remplaçant par

$$\left(\frac{n+1}{k}\right)^{r-1} e^{-b} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{r-1} e^{-b} = \lambda,$$

supposer n assez grand pour que λ soit < 1 . Il

$$\begin{aligned} |S_n| &< h n^{r-1} e^{-nb} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \\ &< \frac{h}{1-\lambda} n^{r-1} e^{-nb}, \end{aligned}$$

la manière d'écrire la constante, est le théorème

concernant la dépendance qu'il y a entre l'ordre de l'approximation de $f(x)$ par les sommes de Fourier et l'ordre de $f(z)$ quand z tend vers les droites $y = \pm b$. Montrons maintenant un théorème qui établira la réciproque, mais qui s'applique à toute représentation et pas seulement à celle de Fourier.

V. — Soit $f(x)$ une fonction de période 2π ; qu'elle admette une expression trigonométrique de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{inx}$, telle que l'approximation sur l'axe réel par la somme partielle S_n satisfasse à la condition

$$\rho_n < \varphi(n) e^{-nb},$$

où $\varphi(n)$ est une fonction non décroissante de n , mais qui finit par être inférieure à $e^{\varepsilon n}$, quelque petit que soit ε , quand n

augmente indéfiniment; alors $f(z)$ est une fonction holomorphe de $z = x + yi$ dans la bande comprise entre les deux droites $y = \pm b$ (frontière exclue) et l'on a, en supposant y positif,

$$|f(x \pm yi)| \leq 2e^{2b} \int_1^{\infty} \varphi(t) e^{-bt} e^{+t} dt.$$

Dans notre hypothèse, la différence $T_n - T_{n-1} = \varphi_{n-1} - \varphi_n$ est une expression trigonométrique d'ordre n , dont le module reste (sur l'axe réel) inférieur à

$$2\varphi(n)e^{-(n-1)b}.$$

Nous avons donc sur l'axe réel, par le théorème général sur le module des dérivées (n° 30),

$$|T_n^{(k)} - T_{n-1}^{(k)}| \leq 2e^{kb} \varphi(n) n^k e^{-nb}.$$

Considérons le développement, pour x réel,

$$f(x) = T_0 + (T_1 - T_0) + \dots + (T_n - T_{n-1}) + \dots$$

Cette série est indéfiniment dérivable sur l'axe réel, car, pour un ordre k quelconque, nous formons la série majorante

$$|f^{(k)}(x)| \leq 2e^{kb} [\varphi(1)e^{-b} + \varphi(2)e^{-2b} 2^k + \dots + \varphi(n)e^{-nb} n^k + \dots].$$

Or cette série a une valeur finie, comme nous allons le montrer en la majorant elle-même par une intégrale. Nous avons

$$\begin{aligned} \varphi(n) n^k e^{-nb} &\leq \int_0^1 \varphi(n+t)(n+t)^k e^{-(n+t)b} dt \\ &\leq e^{bt} \int_n^{n+1} \varphi(t) t^k e^{-bt} dt \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$|f^{(k)}(x)| \leq 2e^{2b} \int_1^{\infty} \varphi(t) t^k e^{-bt} dt.$$

Cette borne va nous permettre de définir $f(z)$ dans la bande par son développement de Taylor. Posons

$$z = x + u, \quad |u| \leq y;$$

il vient

Je dis que cette série converge dans la bande, donc si μ est $< b$, car on a, par la majorante précédente,

$$\begin{aligned} |f(z)| &< 2e^{2b} \int_1^\infty e^{-bt} \varphi(t) dt \sum_{k=0}^\infty \frac{(\mu t)^k}{k!} \\ &< 2e^{2b} \int_1^\infty \varphi(t) e^{-(b-\mu)t} dt. \end{aligned}$$

Or cette intégrale existe pour $\mu < b$, car $\varphi(t)$ est d'ordre inférieur à e^{st} par hypothèse. Si l'on fait $u = yi$, d'où $\mu = y$, on obtient la formule du théorème.

Remarque. — On peut aussi supposer la fonction $\varphi(n)$ non croissante. Dans ce cas, la majoration se fait en écrivant $\varphi(n-1)$ au lieu de $\varphi(n)$, donc $\varphi(t-1)$ au lieu de $\varphi(t)$. Il en résulterait *a fortiori*

$$|f(x \pm yi)| < 2e^{2b} \int_0^\infty \varphi(t) e^{-(b-y)t} dt.$$

87. Théorème V. — *Si, quel que soit n , $f(x)$ peut être représenté sur l'axe réel par une expression trigonométrique d'ordre n , avec une approximation*

$$\rho_n < \psi(n) n^{r-1} e^{-nb},$$

où r est un entier > 0 et $\psi(n)$ une fonction qui tend vers zéro pour $n = \infty$, alors $f(z)$ est holomorphe dans la bande comprise entre les deux droites $y = \pm b$. Si, de plus, $f(z)$ n'a, sur ces droites, d'autres points critiques que des pôles, ceux-ci sont d'ordre $< r$.

Nous avons, dans ce cas-ci,

$$\varphi(n) = n^{r-1} \psi(n)$$

et nous pouvons toujours admettre que cette fonction soit croissante si r est > 1 , ou décroissante si r est < 1 . Appliquons donc le théorème précédent ou la remarque finale; il vient, en tous cas,

$$|f(x \pm yi)| < 2e^{2b} \int_0^\infty \psi(t) t^{r-1} e^{-(b-y)t} dt.$$

Quand y tend vers b , cette expression est infiniment petite par

rapport à

$$\int_0^{\infty} t^{r-1} e^{-(b-y)t} dt = \frac{\Gamma(r)}{(b-y)^r}$$

et, par conséquent, $f(z)$ ne peut pas avoir de pôle d'ordre r sur la droite $y = b$.

Comparons le théorème précédent au théorème III, nous obtenons l'énoncé suivant :

88. Théorème VI. — *Si la fonction $f(z)$, de période 2π , est holomorphe entre les droites $y = \pm b$ et n'a sur ces droites que des pôles comme points critiques; si, de plus, l'ordre maximum de ces pôles est r , alors $f(x)$ admet une représentation d'ordre n quelconque fournissant, sur l'axe réel, une approximation qui, pour $n = \infty$, est d'ordre égal ou inférieur à*

$$n^{r-1} e^{-nb},$$

mais cet ordre ne peut être inférieur, n restant arbitraire.

On conclut de ce théorème que, pour les fonctions considérées, l'approximation obtenue par les sommes de Fourier est de l'ordre de la meilleure approximation.

Il suit des théorèmes précédents que l'ordre de la meilleure approximation pour $n = \infty$ suffit, dans certains cas, pour déceler l'existence d'un point critique essentiel. Par exemple, si $f(z)$ est holomorphe entre les droites $y = \pm b$ et si sa meilleure approximation est d'ordre inférieur à $e^{-(b+y)a}$ quel que soit a , sans l'être jamais définitivement à $n^r e^{-nb}$ quel que soit r , on peut affirmer que $f(z)$, supposée uniforme, admet un point critique essentiel sur les droites $y = \pm b$.

89. Approximation minimum d'un élément polaire simple du premier ordre. — L'élément simple du premier ordre relatif au pôle $z = \pm bi$ est le suivant :

$$\frac{A + B \sin x}{\cos bi - \cos x}.$$

C'est un fait très intéressant qu'il soit possible d'en obtenir, pour chaque ordre n , l'expression trigonométrique d'approximation minimum. Nous allons former cette expression.

b positif et posons

$$T(x) = -2e^{bx} \sin^2 \frac{x - bi}{2};$$

expression trigonométrique entière d'ordre $n + 1$.

Soit x réel, ρ et φ le module et l'argument de

$$-2 \sin^2 \frac{x - bi}{2};$$

$$\frac{i}{T} = \cos(x - bi) - 1 = (\cos x \cos bi - 1) + i \sin x \frac{\sin bi}{i};$$

et, le carré du module a pour valeur

$$\begin{aligned} & (\cos x \operatorname{ch} b - 1)^2 + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 b \\ &= \cos^2 x \operatorname{ch}^2 b - 2 \cos x \operatorname{ch} b + 1 + 1 + \sin^2 x (\operatorname{ch}^2 b - 1) \\ &= (\operatorname{ch} b - \cos x)^2 \end{aligned}$$

φ est déterminé par les équations

$$\cos \varphi = \frac{\cos x \operatorname{ch} b - 1}{\operatorname{ch} b - \cos x}, \quad \sin \varphi = \frac{\sin x \operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b - \cos x}.$$

Ces formules mettent en évidence que φ varie de 0 à 2π

de 0 à 2π et que φ est une fonction impaire de x .

Si

$$T(x) = (\operatorname{ch} b - \cos x) e^{n(x + i\varphi)},$$

$$\begin{aligned} T(x) &= \cos(n(x + i\varphi)) + i \sin(n(x + i\varphi)), \\ \operatorname{ch} b - \cos x &= \cos(n(x + i\varphi)). \end{aligned}$$

elle est paire et la partie imaginaire impaire. Nous

posons, P_1 et P_2 désignant respectivement des poly-

ômes $n + 1$ et n ,

$$T(x) = P_1(\cos x) + i \sin x P_2(\cos x).$$

On sépare les parties réelles et imaginaires dans l'équation

on trouve

$$\begin{cases} \frac{P_1(\cos x)}{\operatorname{ch} b - \cos x} = \cos(n(x + i\varphi)), \\ \frac{\sin x P_2(\cos x)}{\operatorname{ch} b - \cos x} = \sin(n(x + i\varphi)). \end{cases}$$

Posons encore

$$R_1(\cos x) = \frac{P_1(\operatorname{ch} b) - P_1(\cos x)}{\operatorname{ch} b - \cos x},$$

$$R_2(\cos x) = \frac{P_2(\operatorname{ch} b) - P_2(\cos x)}{\operatorname{ch} b - \cos x},$$

R_1 et R_2 sont respectivement des polynômes de degré n et $n-1$ et les équations précédentes peuvent s'écrire

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{P_1(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x} - R_1 = \cos(nx + \varphi), \\ \frac{\sin x P_2(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x} - \sin x R_2 = \sin(nx + \varphi). \end{cases}$$

Quand x varie de 0 à 2π , $nx + \varphi$ varie de 0 à $2(n+1)\pi$ et les seconds membres atteignent $2n+2$ fois leur maximum absolu 1 avec alternance de signes. Donc (n° 70, 4°) les expressions trigonométriques entières d'ordre n , R_1 et $\sin x R_2$, sont d'approximation minimum pour les fonctions respectives

$$\frac{P_1(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x}, \quad \frac{\sin x P_2(\operatorname{ch} b)}{\operatorname{ch} b - \cos x},$$

et l'approximation minimum est 1.

Calculons maintenant les valeurs de $P_1(\operatorname{ch} b)$ et de $P_2(\operatorname{ch} b)$. Nous avons

$$P_1(\cos x) = \frac{T(x) + T(-x)}{2},$$

$$P_2(\cos x) = \frac{T(x) - T(-x)}{2i \sin x}.$$

Faisons $x = bi$ et remarquons que l'on a, par (1),

il vient $T(bi) = 0, \quad T(-bi) = -2e^{nb} \sin^2 bi = 2e^{nb} \operatorname{sh}^2 b;$

$$P_1(\cos bi) = \frac{T(-bi)}{2} = e^{nb} \operatorname{sh}^2 b,$$

$$P_2(\cos bi) = -\frac{T(-bi)}{2i \sin bi} = \frac{T(-bi)}{2 \operatorname{sh} b} = e^{nb} \operatorname{sh} b.$$

Donc, en divisant respectivement les équations (3) par ces deux quantités, celles-ci prennent la forme

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{ch} b - \cos x} - R_1 \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b} = \cos(nx + \varphi) \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b}, \\ \frac{\sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x} - R_2 \sin x \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b} = \sin(nx + \varphi) \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b}. \end{cases}$$

les mettent en évidence le théorème suivant :

éléments simples

$$\frac{1}{\operatorname{ch} b + \cos x}, \quad \frac{\sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x}$$

respectivement, comme expressions trigonométriques d'approximation minimum d'ordre n , les deux fonctions

$$R_1 \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b}, \quad \sin x R_2 \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b},$$

approximations minimum correspondantes sont :

$$\frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh}^2 b}, \quad \frac{e^{-nb}}{\operatorname{sh} b}.$$

as maintenant les équations (4) respectivement par les A et B et ajoutons. Posons

$$S = \left(\frac{AR_1}{\operatorname{sh}^2 b} + \frac{BR_2}{\operatorname{sh} b} \sin x \right) e^{-nb};$$

S est d'ordre n et il vient

$$\frac{\sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x} - S = \left[\frac{A \cos(n x + \varphi)}{\operatorname{sh}^2 b} + \frac{B \sin(n x + \varphi)}{\operatorname{sh} b} \right] e^{-nb}.$$

core

$$A = \cos \alpha \sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b},$$

$$B \operatorname{sh} b = \sin \alpha \sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b};$$

équation devient

$$\frac{B \sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x} - S = \cos(n x + \varphi - \alpha) \frac{\sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}}{\operatorname{sh}^2 b} e^{-nb}.$$

inclut le théorème suivant :

meilleure approximation de l'élément polaire simple d'ordre

$$\frac{A + B \sin x}{\operatorname{ch} b - \cos x}$$

est une expression trigonométrique d'ordre n est

$$\frac{\sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}}{\operatorname{sh}^2 b} e^{-nb}.$$

90. Valeur asymptotique de la meilleure approximation d'un élément simple d'ordre quelconque. — Posons

$$\operatorname{ch} b = m, \quad \frac{db}{dm} = \frac{1}{\operatorname{sh} b}.$$

Dérivons $r - 1$ fois l'équation (5) par rapport à m . Comme φ et α sont des fonctions analytiques de m et ne dépendent pas de n , la valeur asymptotique du second membre pour n infini se réduit au terme qui provient des dérivations successives de l'exponentielle e^{-nb} , parce que chacune de ces dérivations introduit le facteur n . Ce terme sera

$$(-1)^{r-1} \cos(nx + \varphi - \alpha) \frac{\sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}}{(\operatorname{sh} b)^{r+1}} n^{r-1} e^{-nb}.$$

Il admet donc $2n + 2$ extrémés égaux et de signes alternés dans la période.

La dérivation de l'élément simple au premier membre de (5) donne comme résultat

$$(-1)^{r-1} (r-1)! \frac{A + B \sin x}{(m - \cos x)^r}.$$

En vertu de la règle du n° 71, la meilleure approximation d'ordre (infini) n de cette expression est enfermée entre deux bornes, asymptotiquement égales à la valeur absolue commune des extrémés mentionnés ci-dessus. De là, le théorème suivant :

L'approximation minimum de l'élément simple d'ordre r ,

$$\frac{A + B \sin x}{(\operatorname{ch} b - \cos x)^r},$$

par une expression trigonométrique d'ordre $\leq n$, a pour valeur asymptotique (pour $n = \infty$)

$$\frac{1}{(r-1)!} \frac{\sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}}{(\operatorname{sh} b)^{r+1}} n^{r-1} e^{-nb}.$$

Il est intéressant de comparer cette approximation avec celle que donne la série de Fourier. D'après nos calculs antérieurs (n° 84), le terme d'ordre n du développement de Fourier de l'élément simple d'ordre r ci-dessus a pour valeur asymptotique

$$2 \frac{A \cos nx + B \operatorname{sh} b \sin nx}{(r-1)! (\operatorname{sh} b)^r} n^{r-1} e^{-nb}.$$

leur asymptotique de l'approximation correspondante sera

$$\frac{2\sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}}{(r-1)!(\operatorname{sh} b)^r} \sum_{n+1}^{\infty} k^{r-1} e^{-kb},$$

asymptotiquement, revient à

$$\frac{1}{(r-1)!} \frac{\sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b}}{(\operatorname{sh} b)^r \frac{1}{2}(e^b - 1)} n^{r-1} e^{-nb}.$$

La meilleure approximation est donc à celle de Fourier dans le

$$\frac{e^b - 1}{2 \operatorname{sh} b} = \frac{1}{1 + e^{-b}}.$$

Le rapport tend vers l'unité quand b tend vers l'infini.

Les résultats que nous venons d'obtenir pour les éléments peuvent s'étendre à la fonction $f(z)$ elle-même dans des cas généraux. La valeur asymptotique de la meilleure approximation de $f(x)$ sera connue si $f(z)$ n'a qu'un seul couple de pôles conjugués sur les droites $y = \pm b$, ou s'il existe sur ces droites un couple de pôles conjugués d'ordre plus élevé que les

Application à la représentation par polynômes. — Les résultats précédents s'étendent, par la transformation $x = \cos \varphi$, à la représentation d'une fonction $f(x)$ en série de polynômes trigonométriques et à sa meilleure représentation par polynômes dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Si l'on décrit les droites $y = \pm b$, la variable x décrit une ellipse Γ sur ± 1 et dont la somme des demi-axes est $R = e^b$. Nous appellerons, en abrégé, l'ellipse (R) . A la bande du plan φ comprise entre les droites correspond, dans le plan x , l'aire intérieure à l'ellipse (R) .

Il suffira donc d'énoncer quelques-uns des théorèmes transcrits. Le théorème II (n° 82) se transforme dans le suivant :

$f(x)$ est holomorphe et de module $< M$ dans l'ellipse (R) , la somme S_n de la série de polynômes trigonométriques donne,

sur l'axe réel, une approximation

$$\rho_n = \frac{2M}{R^n(R+1)}.$$

Voici maintenant le théorème transformé de IV (n° 86) :

Si, quel que soit n , $f(x)$ peut être représenté dans l'intervalle $(-1, +1)$ par un polynôme de degré n , avec une approximation

$$\rho_n \leq \frac{\varphi(n)}{R^n} \quad (R > 1),$$

où $\varphi(n)$ est une fonction monotone de n , qui devient inférieure à $e^{\varepsilon n}$ quelque petit que soit ε quand n tend vers l'infini, alors $f(z)$ est holomorphe dans l'ellipse (R) ⁽¹⁾. De plus, si $r < R$, on a dans l'ellipse (r)

$$|f(z)| \leq 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \left(\frac{r}{R}\right)^t dt.$$

Voici le théorème transformé de VI (n° 88) :

Si $f(z)$ n'a pas d'autres points critiques que des pôles sur l'ellipse (R) et que l'ordre maximum de ces pôles soit r , sa meilleure approximation d'ordre n infiniment grand sera infiniment petite d'ordre égal ou inférieur à $n^{-1} : R^n$, mais cet ordre ne pourra pas être moindre si n reste arbitraire.

Passons maintenant aux singularités polaires.

Considérons la fonction

$$x = \frac{1}{a^x},$$

où a est un nombre réel de module > 1 . On peut toujours supposer a positif, car, si a était négatif, on changerait le signe de x et celui de la fonction. Posons

$$x = \cos \varphi, \quad a = \operatorname{ch} b;$$

nous sommes ramenés à la fonction

$$\frac{1}{\cos \varphi - \operatorname{ch} b}, \quad b = \log(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

(1) Cette partie du théorème est due à M. Bernstein. *Sur la meilleure approximation des fonctions continues* (n° 24).

On connaît la meilleure approximation trigonométrique de cette fonction (n° 89). De là, le théorème suivant (1) :

Donnée la meilleure approximation de

$$\frac{1}{x-a} \quad (a > 1)$$

par un polynôme de degré n dans l'intervalle $(-1, +1)$ et la meilleure approximation est

$$\rho_n = \frac{1}{(\alpha^2 - 1)(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^n}.$$

considérons maintenant l'expression simple

$$\frac{1}{(x-a)^r},$$

si un pôle d'ordre r entier, nous pouvons encore déterminer la valeur asymptotique de sa meilleure approximation quand n est infiniment grand dans l'intervalle $(-1, +1)$. Cette

$$\frac{1}{(r-1)!} \frac{n^{r-1}}{(\alpha^2 - 1)^{\frac{r-1}{2}} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^n}.$$

Si au lieu d'un pôle réel, nous considérons un couple de pôles dans le plan x , la substitution $x = \cos \varphi$ introduite on s'en aperçoit facilement, deux couples de pôles distincts sur les droites $y = \pm b$ du plan φ . Nous ne sommes pas en état de déterminer la valeur asymptotique de la meilleure approximation d'ordre infiniment grand n . Cette approximation est un infiniment petit dont l'ordre seul nous sera

généralement, si une fonction n'admet pas d'autres points que des pôles, sa meilleure approximation, dans l'intervalle $(-1, +1)$, par un polynôme d'ordre infiniment grand n , est

BERNSTEIN, *Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation analytiques admettant des singularités données* [Bull. Belge (Classe des Sciences, n° 2, 1913)]. M. Bernstein n'a considéré l'approximation par polynômes. Nous venons de montrer que l'on arrive à des résultats plus complets dans l'approximation trigonométrique.

un infiniment petit dont l'ordre est connu. On suppose toutefois que les pôles sont extérieurs au segment considéré ($-1, +1$).

92. **Remarque générale.** — Les pôles sont des cas particuliers de points critiques plus généraux, que nous appellerons *points critiques d'ordre s* (s fractionnaire) et que nous étudierons dans le Chapitre suivant. Nous allons utiliser dans cette étude des procédés entièrement différents des précédents, mais qui s'appliquent au cas des singularités polaires. Nous serons ainsi conduits à des théorèmes plus généraux qui contiennent les précédents comme cas particuliers (s entier).

CHAPITRE IX.

QUES PRÉSENTANT CERTAINES SINGULARITÉS
ES (POINTS CRITIQUES D'ORDRE s).

**préliminaire de la valeur asymptotique d'une
complexe.** — Considérons, dans le plan de la
un segment vertical PQ ayant pour extré-

$$P(\alpha + bi), \quad Q[\alpha + (b + \varepsilon)i],$$

Es. Ce segment est de longueur ε . Désignons
traversé dans le sens direct, formé des deux bords
d'un cercle infiniment petit décrit autour du
l'intégrale sur ce lacet :

$$= \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(z) e^{kzi} dz}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s},$$

fonction qui est régulière dans le cercle de
rayon PQ (ou ε) et qui ne s'annule pas au point P.
 k et s sont des constantes et que s n'est pas
nul, de sorte que P est un point singulier de
ordre s . Nous nous proposons maintenant de détermi-
ner la valeur asymptotique de l'intégrale I_k , quand k est un
nombre qui croît indéfiniment.

Changement de variables

$$z = \alpha + bi + t.$$

On fait correspondre aux points P et Q les
points $P'(t = \varepsilon i)$ et transforme le lacet L dans un
lacet qui tourne le segment $P'Q'$ de l'axe imaginaire.
On précède par une simple translation. L'in-

tégrale transformée sera

$$I_k = \frac{e^{-kb+k\alpha i}}{\pi} \int_{L'} \frac{\varphi(\alpha + bi + t) e^{kti} dt}{[\operatorname{ch} b - \cos(bi + t)]^s}.$$

Par hypothèse, sur L' , on a le développement convergent, procédant suivant les puissances de t :

$$(2) \quad \frac{\varphi(\alpha + bi + t)}{[\operatorname{ch} b - \cos(bi + t)]^s} = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots}{t^s};$$

donc, q désignant un entier positif et φ une fonction de t bornée sur L' , on a

$$\frac{\varphi(\alpha + bi + t)}{[\operatorname{ch} b - \cos(bi + t)]^s} = \sum_{k=0}^{q-1} a_k t^{k-s} + \varphi t^q,$$

d'où

$$(3) \quad \begin{aligned} I_k &= \sum_{k=0}^{q-1} \frac{a_k}{\pi} e^{-kb+k\alpha i} \int_{L'} t^{k-s} e^{kti} dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} e^{-kb+k\alpha i} \int_{L'} \varphi t^q e^{kti} dt. \end{aligned}$$

Prenons pour q le premier entier positif $\geq s$. Alors, dans la dernière intégrale, $q-s$ est positif, t^{q-s} s'annule sur le cercle infiniment petit de centre $P'(t=0)$ et l'intégrale sur L' se réduit à celles sur les deux bords du segment $P'Q'$ (où $t = ri$, r variant de 0 à ε). Soit M le module maximum de φ ; on voit, en remplaçant la quantité à intégrer par son module, que le dernier terme de la formule précédente est de module inférieur à

$$\frac{2M}{\pi} e^{-kb} \int_0^\varepsilon t^{q-s} e^{-kt} dt < \frac{2M}{\pi} \frac{\Gamma(1+q-s)}{k^{1+q-s}} e^{-kb}.$$

Nous allons constater que cette borne est infiniment petite par rapport à la valeur asymptotique des autres termes de la même formule (3). Considérons donc l'un d'eux

$$\frac{a_\lambda}{\pi} e^{-kb+k\alpha i} \int_{L'} t^\lambda e^{kti} dt.$$

Supposons provisoirement $\lambda = s-1$, auquel cas l'intégrale est encore nulle sur le cercle infiniment petit de centre P' et se

es sur les deux bords du segment P^lQ^l . Posons

$$t = re^{\varphi i};$$

de t est $-\frac{3\pi}{2}$ à gauche et $+\frac{\pi}{2}$ à droite du segment. D'ailleurs, sur les deux bords, on a $t = ir$, $dt = i dr$ entre 0 et ε . Il vient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^{k t} dt &= -i e^{-\frac{3\pi i}{2}(\lambda-s)} \int_{\varepsilon}^0 r^{\lambda-s} e^{-k r} dr \\ &+ i e^{\frac{\pi i}{2}(\lambda-s)} \int_0^{\varepsilon} r^{\lambda-s} e^{-k r} dr \\ &= 2 e^{-\frac{\pi i}{2}(\lambda-s)} \sin(\lambda-s) \pi \int_0^{\varepsilon} r^{\lambda-s} e^{-k r} dr. \end{aligned}$$

pour faire disparaître la restriction imposée à $\lambda > s$, mettons sous la forme suivante :

$$\int_{\gamma} e^{k t} dt = 2 e^{-\frac{\pi i}{2}(\lambda-s)} \sin(\lambda-s) \pi \left[\frac{\Gamma(\lambda+1-s)}{k^{\lambda+1-s}} - \int_{\varepsilon}^{\infty} r^{\lambda-s} e^{-k r} dr \right].$$

En cette nouvelle forme, la relation subsiste pour toutes les valeurs de s et, en particulier, pour les valeurs réelles négatives. Les deux membres sont des fonctions analytiques uniformes de s . Si k tend vers l'infini, le dernier terme est négligeable en présence du précédent. C'est donc celui-ci qui donne l'asymptotique, et l'on a, par les propriétés classiques des fonctions Γ ,

$$\int_{\gamma} e^{k t} dt \sim 2 \pi e^{-\frac{\pi i}{2}(\lambda-s)} \frac{k^{\lambda+1-\lambda}}{\Gamma(s-\lambda)},$$

signifiant l'égalité asymptotique.

Or, tant $\lambda > 0$, le terme principal dans la formule (3)

est 0. La valeur asymptotique de I_k sera

$$2 \pi e^{-\frac{\pi i}{2}(\lambda+1)}$$

La valeur de a_0 se tire de la formule (2). On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \varphi(\alpha + bi) \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{t}{\operatorname{ch} b - \cos(bi + t)} \right]^s \\ &= \frac{\varphi(\alpha + bi)}{(\sin bi)^s} = e^{-\frac{s\pi i}{2}} \frac{\varphi(\alpha + bi)}{(\operatorname{sh} b)^s}. \end{aligned}$$

Par la substitution de cette valeur, on trouve la relation asymptotique cherchée

$$(5) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z) e^{kzi} dz}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s} \sim 2\varphi(\alpha + bi) \frac{k^{s-1} e^{-kb + kxi}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Cette formule est en défaut si s est un entier nul ou négatif, et ne l'est que dans ce cas.

§4. Dérivation de la formule asymptotique précédente. — La dérivation par rapport à la lettre s des formules (2), (3) et (4) se justifie à simple vue. Donc la formule (5) est aussi dérivable par rapport à s . Cette dérivation conduit à la formule asymptotique suivante, dans laquelle m est un entier positif :

$$\begin{aligned} (6) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{[\log[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]]^m}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s} \varphi(z) e^{kzi} dz \\ \sim 2(-1)^m \frac{k^{s-1} (\log k)^m e^{-kb + kxi}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s} \varphi(\alpha + \beta i). \end{aligned}$$

Ceci suppose toutefois que s ne soit pas un entier nul ou négatif. Dans ce cas, nous poserons $s = -p$ (p entier positif). Il faut alors, pour obtenir le terme principal, faire porter une fois la dérivation sur le facteur $1/\Gamma(s)$ qui s'annule pour $s = -p$. On trouve ainsi, comme valeur asymptotique de l'intégrale (6),

$$2(-1)^m m \left[\frac{1}{\Gamma(s)} \right]' \frac{k^{s-1} (\log k)^{m-1} e^{-kb + kxi}}{(\operatorname{sh} b)^s} \varphi(\alpha + \beta i).$$

D'ailleurs, pour $s = -p$, on a

$$\left[\frac{1}{\Gamma(s)} \right]' = \left[\frac{\sin s\pi}{\pi} \Gamma(1-s) \right]' = -\cos s\pi \Gamma(1-s) = (-1)^p p!$$

Donc, si $s = -p$ est un entier négatif, et en supposant pour simplifier $\alpha = 0$, la formule (6) doit être remplacée par la sui-

$$\int_1^{\infty} (\operatorname{ch} b - \cos z)^p [\log(\operatorname{ch} b - \cos z)]^m \varphi(z) e^{kzi} dz \\ \sim 2m(-1)^{m+p} (\operatorname{sh} b)^p \frac{(\log k)^{m-1} e^{-kb}}{k^{p+1}} \varphi(bi).$$

s critiques d'ordre s . — Nous allons maintenant étudier les fonctions présentant certains points critiques plus généraux que les pôles et comprenant les pôles comme cas particulier. Nous allons tout d'abord définir ces points critiques.

Soit $f(z)$ une fonction analytique, uniforme dans le voisinage d'un point z_0 . Nous dirons que le point z_0 est un *point critique* de $f(z)$, si, dans le voisinage de ce point, $f(z)$ est de

$$f(z) = \frac{\varphi_1(z)}{(z - z_0)^s},$$

où $\varphi_1(z)$ est régulière et non nulle au point z_0 , et où s est un entier quelconque autre qu'un entier nul ou négatif. Si s est un entier positif, z_0 est un point critique algébrique.

Supposons maintenant que $f(z)$ soit périodique de période 2π . Nous allons modifier la représentation précédente de manière à tenir compte de la périodicité. Considérons un couple de points conjugués

$$z = bi, \quad \bar{z} = -bi;$$

de ces points, nous aurons

$$f(z) = \frac{\varphi_1(z)}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - z)]^s},$$

où $\varphi_1(z)$ est holomorphe avec φ_1 , car le quotient

$$\left[\frac{z - z - bi}{\operatorname{ch} b - \cos(z - z)} \right]^s$$

est holomorphe aux points $z = \pm bi$.

Points critiques simples d'ordre s . — Considérons un couple de points conjugués d'ordre s , $z = z_0 + bi$. On les ramène à la forme $\pm bi$, par le changement $z = z_0 + w$. Ainsi, soit $f(z)$ une fonction périodique admettant

les deux points critiques conjugués $\pm bi$. Au voisinage de ces points, $f(z)$ est de la forme (7) , à savoir

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}.$$

Les deux fonctions régulières

$$\frac{\varphi(z) + \varphi(-z)}{2}, \quad \frac{\varphi(z) - \varphi(-z)}{2 \sin z}$$

sont paires de période 2π et sont, par conséquent, des fonctions uniformes de $\cos z$. Elles sont développables par la formule de Taylor suivant les puissances de $\cos z = \cos bi$. Elles sont donc respectivement de la forme

$$A + (\cos bi - \cos z)\psi_1(\cos z), \quad B + (\cos bi - \cos z)\psi_2(\cos z),$$

où ψ_1 et ψ_2 sont holomorphes au voisinage des points $z = \pm bi$. On en tire

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= A + B \sin z + (\cos bi - \cos z)(A\psi_1 + B \sin z \psi_2) \\ &= A + B \sin z + (\operatorname{ch} b - \cos z)\varphi_2(z), \end{aligned}$$

où φ_2 est régulière aux points $\pm bi$. Il vient ainsi finalement

$$(8) \quad f(z) = \frac{A + B \sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} + \frac{\varphi_2(z)}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^{s-1}}.$$

Nous donnerons au premier terme de cette décomposition, qui est le terme principal, le nom d'*élément simple d'ordre s* . Il est relatif aux deux points $\pm bi$. Dans le cas général, les deux points conjugués sont $\alpha \pm bi$. On revient à ce cas par le changement de z en $z - \alpha$. Donc l'expression de l'*élément simple d'ordre s* pour les deux points conjugués $\alpha \pm bi$ est

$$\frac{A + B \sin(z - \alpha)}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s}.$$

La formule (8) nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Au voisinage d'un point critique d'ordre s , $f(z)$ est la somme de l'élément simple d'ordre s et d'une fonction pour laquelle l'ordre du point critique est abaissé.

fonction périodique, holomorphe entre les deux droites
 supposons d'abord qu'elle n'admette, sur ces deux
 deux points critiques conjugués non équivalents,
 ceux-ci d'ordre s positif ou négatif. Les coefficients a_k
 rier, dont nous nous proposons de trouver les valeurs
 es pour $k \rightarrow \infty$, sont définis par l'intégrale, effectuée

$$a_k + ib_k = \frac{1}{\pi} \int_{AB} f(z) e^{kz} dz,$$

par AB un segment de cet axe de longueur 2π et de
 leonque. Nous choisirons un segment AB contenant
 sens étroit. Construisons le rectangle ABA'B', qui a
 segment AB et dont le côté opposé A'B' se trouve
 $y = b + \varepsilon$. Nous supposons que ε est un nombre
 t assez petit pour que le rectangle ABA'B' ne con-
 e seul point critique $z = bi$, que nous désignerons
 ons ce point critique P au côté supérieur A'B' du
 e une coupure verticale PQ et désignons par L le
 tourne cette coupure dans le sens direct. La ligne
 AB peut être remplacée par le contour AA'B'B en
 e contourner le point critique P par le lacet L. Les
 r les côtés verticaux AA' et B'B du rectangle se
 cause de la périodicité. L'intégrale (9) se réduit
 égales sur A'B' et sur L, c'est-à-dire que l'on a

$$a_k + ib_k = \frac{1}{\pi} \int_{A'B'} + \frac{1}{\pi} \int_L f(z) e^{kz} dz.$$

trouver la valeur asymptotique de cette expression
 Le terme principal est l'intégrale sur L, car l'inté-
 B' est, $f(z)$ étant borné, de l'ordre de $|e^{kz}| = e^{-k(b+\varepsilon)}$;
 ent petite par rapport à l'intégrale sur L, comme le
 e ci va nous le montrer. Nous aurons donc asympto-

$$a_k + ib_k \sim \frac{1}{\pi} \int_L f(z) e^{kz} dz.$$

hypothèse, $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{[ch b - \cos(z - z_0)]^s}$$

et cette intégrale rentre dans celle dont nous avons déterminé la valeur asymptotique au début du Chapitre. Il vient, par la formule (5),

$$(11) \quad a_k + ib_k \sim 2\varphi(\alpha + bi) e^{k\pi i} \frac{k^{s-1} e^{-kb}}{\Gamma(s) \operatorname{sh} b},$$

ce qui fournit les valeurs asymptotiques cherchées de a_k et de b_k .

Il y a lieu de remarquer que si l'élément simple principal de $f(z)$ au point $\alpha + bi$ est

$$\frac{A + B \sin(z - \alpha)}{[\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s},$$

on a, d'après la formule (8),

$$\varphi(z) = A + B \sin(z - \alpha) + [\operatorname{ch} b - \cos(z - \alpha)]^s \varphi_1(z);$$

d'où

$$\varphi(\alpha + bi) = A + iB \operatorname{sh} b.$$

Par hypothèse, l'un au moins des deux coefficients A ou B est différent de 0.

En second lieu, supposons que $f(z)$, holomorphe entre les droites $\gamma = \pm b$, admette, sur ces droites, plusieurs couples de points critiques non équivalents et d'ordres déterminés; par exemple, les points

$$\alpha_1 + bi, \quad \alpha_2 + bi, \quad \dots$$

des ordres s_1, s_2, \dots respectivement. Si l'un de ces ordres, par exemple s_1 , est supérieur à tous les autres, je vais montrer que l'on connaîtra encore la valeur asymptotique de $a_k + ib_k$ et qu'elle conservera la même forme que dans la formule (11).

En effet, la valeur de $a_k + ib_k$ est donnée par l'intégrale (9) sur AB . Celle-ci se ramène, comme ci-dessus, à l'intégrale sur $A'B'$ et sur divers lacets L_1, L_2, \dots analogues à L et contournant les divers points critiques situés au-dessus de l'axe réel. Ces intégrales se calculent comme ci-dessus, mais c'est l'intégrale sur L_1 qui est prépondérante. La formule (11) subsiste donc, sauf qu'il faut y remplacer α par α_1 , φ par φ_1 et s par l'ordre maximum s_1 .

Passons maintenant au cas général. Supposons que la fonction périodique $f(z)$, holomorphe entre les deux droites $\gamma = \pm b$,

sur ces droites, λ couples de points critiques de l'ordre s à savoir

$$z_1 \pm bi, \quad z_2 \pm bi, \quad \dots, \quad z_\lambda \pm bi,$$

et que l'élément simple principal relatif à $z_\mu \pm bi$ soit

$$\frac{A_\mu \mp i B_\mu \sin(z - z_\mu)}{[\operatorname{ch} b \mp \cos(z - z_\mu)]^s} \quad (\mu = 1, 2, \dots, \lambda)$$

on abrégé,

$$A_\mu \mp i B_\mu \operatorname{sh} b = \Pi_\mu.$$

D'après les raisonnements précédents, la valeur de $\alpha_k \mp ib_k$ sera, sauf une erreur d'ordre supérieur à $k^{s-1} e^{-kb}$,

$$\alpha_k \mp ib_k \approx \left(\sum_{\mu=1}^{\lambda} \Pi_\mu e^{h z_\mu i} \right) \frac{e^{k s - 1} e^{-k b}}{\Gamma(s) (\operatorname{sh} b)^s}.$$

La formule ne donne la valeur asymptotique de $\alpha_k \mp ib_k$ que si b n'est

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda} \Pi_\mu e^{h z_\mu i}$$

ni infiniment petite. Dans ces cas d'exception, b est un infiniment petit d'ordre plus élevé que $k^{s-1} e^{-kb}$ et nous connaissons plus la valeur asymptotique.

6. de l'approximation fournie par la série de Fourier. — Soit $f(z)$ une fonction périodique, holomorphe entre les droites $\operatorname{Re} z = \pm b$, n'ayant sur ces droites que des points critiques terminés et dont l'ordre maximum est s . Soient S_n la somme partielle de Fourier d'ordre n de $f(z)$ et φ_n l'approximation correspondante

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{\alpha_k^2} - b_k^2.$$

Il est établi, au numéro précédent, que $\sqrt[k]{\alpha_k^2} - b_k^2$ est un infiniment petit de l'ordre de $k^{s-1} e^{-kb}$ ou d'ordre plus élevé. Il en résulte qu'on peut assigner une constante h telle que l'on ait, si n est

$$\varphi_n = h n^{s-1} e^{-nb}.$$

Donc : *L'approximation par la série de Fourier est un infiniment petit, qui est au moins de l'ordre de*

$$n^{s-1}e^{-nb},$$

et il en résulte qu'il est exactement de cet ordre, car nous allons prouver que c'est celui de la meilleure approximation.

Soit, en effet, φ_n la meilleure approximation. Nous avons d'abord $\varphi_n = \varphi'_n$. D'autre part, nous avons, par une formule connue (n° 1), 6°),

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k'' + b_k'').$$

Si la valeur asymptotique de $a_k + ib_k$ est donnée par la formule (11), elle est de l'ordre de $k^{s-1}e^{-kb}$ et l'on peut assigner une constante h_1 telle qu'on ait

$$\varphi_n = h_1 n^{s-1} e^{-nb}.$$

Donc φ_n est du même ordre que φ'_n . Dans ce cas, la conclusion est immédiate.

Il n'y a de difficulté que quand $f(z)$ admet λ couples de points critiques du même ordre maximum s , car, dans ce cas, la formule (12), qui remplace la formule (11), ne donne pas nécessairement la valeur asymptotique de $a_k + ib_k$.

On se tire d'affaire en déduisant de la formule (12) une formule asymptotique qui subsiste dans tous les cas.

A cet effet, formons le déterminant d'ordre λ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{\alpha_1 t} & e^{\alpha_2 t} & \dots & e^{\alpha_\lambda t} \\ e^{2\alpha_1 t} & e^{2\alpha_2 t} & \dots & e^{2\alpha_\lambda t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{(\lambda-1)\alpha_1 t} & e^{(\lambda-1)\alpha_2 t} & \dots & e^{(\lambda-1)\alpha_\lambda t} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant n'est pas nul, car il est le produit de toutes les différences non nulles

$$e^{\alpha_2 t} - e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_3 t} - e^{\alpha_1 t}, \dots$$

Nous désignerons les mineurs relatifs à la première colonne par $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\lambda-1}$.

en des nombres $0, 1, 2, \dots, \lambda - 1$. Remplaçons k dans la formule (12); nous en tirons, avec le même approximation,

$$(\alpha_{k+\varphi} + ib_{k+\varphi}) \sim \left(\sum_{\mu=1}^{\lambda} H_{\mu} e^{k(\varphi) \alpha_{\mu} i} \right) \frac{2k^{s-1} e^{-\lambda b}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

Multiplions cette relation par $\Delta_{\varphi} e^{\varphi b}$ et sommions par rapport à φ :

$$\sum_{\varphi=0}^{\lambda-1} (\alpha_{k+\varphi} + ib_{k+\varphi}) \Delta_{\varphi} e^{\varphi b} \sim \Delta H_1 e^{k \alpha_1 i} \frac{2k^{s-1} e^{-\lambda b}}{\Gamma(s)(\operatorname{sh} b)^s}.$$

formule que nous cherchions. Elle subsiste dans toute limite comme formule asymptotique, car le coefficient ΔH_1 est différent de zéro par hypothèse. Il résulte immédiatement de cette formule (le second membre étant borné) que l'on peut assigner une constante ε_k telle que l'on ait, quel que soit k ,

$$\sum_{\varphi=0}^{\lambda-1} |\alpha_{k+\varphi} + ib_{k+\varphi}| \leq h_2 k^{s-1} e^{-\lambda b},$$

en remplaçant k par $n+1$, φ par k et en changeant au besoin h_2 telle qu'on ait, quel que soit n ,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq h_2 n^{s-1} e^{-nb}.$$

On est maintenant à la meilleure approximation ε_n . Elle satisfait *a priori* la condition

$$\varepsilon_n \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} (a_k^2 + b_k^2)},$$

et $p_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et $q_k = 1$ dans la relation classique

$$\varepsilon^2 \leq (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2 + \dots + p_n^2 + q_n^2) \leq (p_1 q_1 + \dots + p_n q_n)^2,$$

et encore *a fortiori*, par ce qui précède,

$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{\sqrt{f_2 h}} \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq \frac{h_2}{\sqrt{f_2 h}} n^{s-1} e^{-nb}.$$

Le théorème est donc démontré. L'approximation obtenue par la somme S_n de Fourier est de l'ordre de la meilleure approximation, et cet ordre est celui de $n^{\frac{1}{2}} e^{-nb}$ exactement.

99. **Valeur asymptotique de l'approximation minimum de l'élément simple d'ordre s .** — Établissons d'abord une formule préliminaire. Soit $P(x)$ un polynôme de degré $n + 1$ ayant toutes ses racines réelles et situées sur le segment $(-1, +1)$. Soit ensuite $f(x)$ une fonction analytique, régulière sur ce segment. Si l'on désigne par $R(x)$ le polynôme de degré n qui se confond avec $f(x)$ aux $n + 1$ points du segment qui sont racines de $P(x)$, on a

$$(14) \quad f(x) - R(x) = \frac{P(x)}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-x)P'(z)},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour C entourant le segment $(-1, +1)$ et ne contenant aucun point singulier de $f(z)$.

En effet, en remplaçant l'intégrale sur C par la somme des résidus de $f(z)$ au point x et aux $n + 1$ points racines de $P(z)$, on retrouve $f(x) - P(x)$, où $P(x)$ est exprimé par la formule d'interpolation de Lagrange.

Nous allons transformer la formule (14). Remplaçons respectivement x par $\cos z$ et z par $\cos t$. Prenons comme contour C une ellipse de foyers $(-1, +1)$. La variable z décrit cette ellipse, quand t décrit le segment AB parallèle à l'axe réel, d'ordonnée positive et limité aux abscisses $-\pi$ et $+\pi$. L'aire intérieure à C correspond alors à celle du rectangle compris entre AB et l'axe réel, donc $f(\cos t)$ sera supposée régulière dans ce rectangle.

Par ces substitutions, la formule (14) devient (le sens direct étant BA)

$$(15) \quad f(\cos z) - R(\cos z) = \frac{P(\cos z)}{2\pi i} \int_{AB} \frac{f(\cos t) \sin t dt}{(\cos t - \cos z)(P'(\cos t))}.$$

Nous aurons à faire deux applications de cette formule, en choisissant respectivement pour P deux polynômes que nous avons déjà rencontrés et sur lesquels nous allons tout d'abord revenir.

Nous savons (n° 89) que, si l'on pose

$$T(z) = 1 - 2e^{nz} \sin^2 \frac{z}{2},$$

$$T(z) = P_1(\cos z) + i \sin z P_2(\cos z),$$

sont deux polynômes de degrés n et $n-1$ respectivement toutes leurs racines sur le segment $(-1, +1)$. Ce sont les deux polynômes que nous aurons à introduire dans la (5). Avant de faire cette introduction, faisons encore une remarque préalable sur l'ordre de grandeur de ces polynômes en y . Nous supposons la variable $z = x + iy$ d'ordre positif. Alors on voit immédiatement que $T(z)$ est petit de l'ordre de e^{-ny} et $T(-z)$ infiniment grand de l'ordre de e^{ny} . Donc les deux polynômes

$$P_1(\cos z) = \frac{T(z) + T(-z)}{2}, \quad P_2(\cos z) = \frac{T(z) - T(-z)}{2i \sin z}$$

sont grands de l'ordre de e^{ny} .

En première application de la formule (15), nous allons chercher la valeur asymptotique de l'approximation minimum pour n simple pair d'ordre s . A cette fin, nous substituons dans la formule les fonctions

$$f(\cos z) = \frac{1}{(\cosh b)^{s+1} \cos z}, \quad P = P_1(\cos z),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{(\cosh b)^{s+1} \cos z} = R_1(\cos z) + \frac{P_1(\cos z)}{2\pi i} \int_{AB} \frac{\sin t dt}{(\cosh b - \cos t)(\cos t - \cos z)} P_1(\cos t).$$

La fonction $f(\cos t)$ n'a ici que le seul point critique $t = bi$. Ce point dans un rectangle $AB'A'B$ de base AB et tel que le point b soit à $\frac{1}{2}$ du côté supérieur $A'B'$ soit $\frac{1}{2} \rightarrow b$. Joignons le point b que nous désignerons par P , au côté $A'B'$ par une verticale PQ ; désignons par L le lacet qui contourne cette verticale et les deux bords dans le sens direct. La ligne d'intégration peut être remplacée par le contour $AA'B'B$, à condition de passer le point P par le lacet L . Les intégrales sur les bords AB et BB' se détruisent. L'intégrale se réduit donc à celles sur L .

Il nous propose de trouver la valeur asymptotique de l'intégrale pour n infini. L'intégrale sur $A'B'$ est alors infiniment

petite de l'ordre de $e^{-n(b+\varepsilon)}$, car $P_1(\cos t)$ est de l'ordre de $e^{n(b+\varepsilon)}$, tandis que les autres facteurs sous le signe d'intégration sont finis. Cette intégrale est négligeable par rapport à celle sur L . C'est ce que le calcul de celle-ci va démontrer. Nous obtiendrons ainsi la formule asymptotique

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} = R_1(\cos z) \\ \sim \frac{P_1(\cos z)}{2\pi i} \int_L (\operatorname{ch} b - \cos t)^s (\cos t - \cos z) P_1(\cos t) dt.$$

Calculons donc la valeur asymptotique de cette intégrale. Nous avons

$$P_1(\cos t) = -e^{nti} \sin^{n-1} \frac{t}{2} \frac{bi}{2} = e^{-nti} \sin^{n-1} \frac{t}{2} \frac{bi}{2}.$$

De là résulte, sur l'axe imaginaire positif (donc sur L), le développement convergent :

$$\frac{1}{P_1(\cos t)} = \frac{e^{nti}}{\sin^2 \frac{t}{2} + \frac{bi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{e^{2nti} \left(\frac{\sin \frac{t}{2} + \frac{bi}{2}}{\sin \frac{t}{2} - \frac{bi}{2}} \right)^n}{\sin^2 \frac{t}{2} + \frac{bi}{2}} \right|^k.$$

Nous en concluons, en désignant par q un entier positif et par μ une fonction bornée sur L ,

$$\frac{1}{P_1(\cos t)} = \frac{e^{nti}}{\sin^2 \frac{t}{2} + \frac{bi}{2}} \sum_{j=0}^{q-1} \left| \frac{e^{2nti} \left(\frac{\sin \frac{t}{2} + \frac{bi}{2}}{\sin \frac{t}{2} - \frac{bi}{2}} \right)^n}{\sin^2 \frac{t}{2} + \frac{bi}{2}} \right|^j \\ + \mu e^{(2q+1)nti} \left(\frac{\sin \frac{t}{2} + \frac{bi}{2}}{\sin \frac{t}{2} - \frac{bi}{2}} \right)^{nq}.$$

Donnons à q une valeur positive $\frac{s}{2}$, substituons ce développement dans la dernière intégrale et désignons par μ_1 une fonction qui est bornée sur L en même temps que le facteur

$$\left(\frac{\sin \frac{t}{2} + \frac{bi}{2}}{\sin \frac{t}{2} - \frac{bi}{2}} \right)^{nq} \\ \frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos t)^s};$$

nous obtenons l'équation

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} = R_1(\cos z) \sim \frac{P_1(\cos z)}{2\pi i} \sum_{j=0}^{q-1} \int_1^\infty \frac{e^{2jt + (1+nti)\varphi_j(t)} dt}{(\operatorname{ch} b - \cos t)^s} \\ + \mu_1(\cos z) \frac{1}{t^s}.$$

osé, en abrégé,

$$\varphi_k(t) = (-1)^k \cos t - \cos z \left(\sin \frac{t - bi}{2} \right)^{2k} \\ \left(\sin \frac{t + bi}{2} \right)^{2k+1}.$$

$\varphi_k(t)$ est holomorphe dans le cercle de centre bi et de rayon 1 . Chaque terme de la somme Σ est asymptotiquement donné par la formule (5) du n° 93. Le terme complémentaire est de

$$\int_1^\infty |e^{-2q+1} n t| dt = 2 e^{-2q+1} b n \int_0^\infty e^{-2q+1} t^2 dt,$$

ordre de $e^{-2q+1} b n$ et, par conséquent, négligeable. Le principal est celui où $k = 0$. Il vient donc, par la formule

$$\frac{1}{\cos z} = R_1(\cos z) + \frac{P_1(\cos z)}{t} + \frac{n^{2+1} e^{-n^2 b}}{P_1(\cosh b)},$$

on a encore

$$\frac{1}{\cosh b} = \frac{\sin bi}{t \cos bi} + \frac{\cos z \sin^2 bi}{\cosh b} + \frac{t}{\cos z \sinh b};$$

on définitive,

$$\frac{1}{\cosh b} = R_1(\cos z) + \frac{P_1(\cos z)}{\cosh b} + \frac{n^{2+1} e^{-n^2 b}}{P_1(\cosh b)}.$$

On (n° 89) que le quotient

$$\frac{P_1(\cos z)}{\cosh b} = \frac{\cos n z}{\cosh b} + \dots$$

est 2 fois son maximum absolu avec alternance de signes, varie de 0 à 2π ; nous voyons que notre relation asymptotique entraîne le théorème suivant :

THEOREME I. — La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction $1/\cosh b$ est

$$\frac{1}{\cosh b} = \cos z$$

Comme seconde application, nous allons déterminer la valeur asymptotique de l'élément simple impair d'ordre s . A cet effet, nous recommençons le calcul précédent, en conservant la même fonction

$$f(z) = \frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s},$$

mais en prenant, à la place de P , le polynôme

$$P_2(\cos t) = \frac{T(t) - T(-t)}{2i \sin t}.$$

Le calcul est tout à fait analogue au précédent. Mais, comme $\sin t$ figure au dénominateur de l'expression de P_2 , il s'introduit sous le signe d'intégration un facteur $\sin t$ en plus au numérateur, d'où un facteur $\operatorname{sh} b$ en moins au dénominateur du résultat. Il suffit d'indiquer ce résultat, qui est

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} = R_2(\cos z) \sim \frac{P_2(\cos z) = n^{s-1} e^{-nb}}{\operatorname{ch} b - \cos z = \Gamma(s) \operatorname{sh} b}.$$

Multiplions par $\sin z$; il vient

$$\frac{\sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s} = \sin z R_2(\cos z) \sim \frac{\sin z P_2(\cos z) = n^{s-1} e^{-nb}}{\operatorname{ch} b - \cos z = \Gamma(s) \operatorname{sh} b}.$$

Or, on a maintenant (n° 89)

$$\frac{\sin z P_2(\cos z)}{\operatorname{ch} b - \cos z} = \sin n z = \frac{1}{2i},$$

d'où le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction $\frac{\sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}$ est*

$$\frac{\sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}$$

à pour valeur asymptotique

$$\varphi_n \sim \frac{n^{s-1} e^{-nb}}{\Gamma(s) \operatorname{sh} b}.$$

En combinant les formules d'où découlent les deux théorèmes précédents, on obtient le théorème suivant, exactement comme dans le cas des singularités polaires (n° 83) :

§ III. — *La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction z réelle*

$$A + B \sin z \\ (\operatorname{ch} b = \cos z)$$

pour asymptotique

$$z_n \approx \sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b} \frac{n^{3/4} e^{-nb}}{\Gamma(s) (\operatorname{sh} b)^{s+1/2}}$$

Les expressions précédentes de z_n supposent $\Gamma(s)$ positif. Si $\Gamma(s)$ est négatif, $\Gamma(s)$ peut l'être aussi. Dans ce cas, il faut dans les formules précédentes, $\Gamma(s)$ par sa valeur

absolue. On voit ainsi que, comme dans le cas des singularités polaires, pour la meilleure approximation est à celle de Fourier dans le

$$\frac{e^b - 1}{2 \operatorname{sh} b} = \frac{1}{1 + e^{-2b}}$$

cas où b tend vers l'unité quand b croît indéfiniment.

Asymptotique de l'approximation minimum dans le

§ IV. Soit $f(z)$ une fonction périodique régulière entre γ et $\gamma + b$ et admettant plusieurs couples de points critiques déterminés sur ces deux droites.

On sait (n° 98) l'ordre de l'approximation minimum dans le cas où il n'y a qu'un couple de points critiques distincts sur les droites, ou un couple d'ordre α plus élevé que tous les autres. En effet, on peut isoler le terme principal de $f(z)$ au voisinage des points critiques. C'est un élément simple d'ordre α , qui est le terme principal dans la détermination de l'approximation. La valeur de l'approximation de $f(z)$ sera la même que pour le terme principal. Elle sera donc donnée par les théorèmes pré-

Points singuliers logarithmiques. — On peut aussi trouver l'asymptotique de la meilleure approximation de la fonc-

$$\log(1 + b \cos z)$$

dans laquelle m est un entier positif et s un nombre réel quelconque.

Nous ne développerons pas la démonstration; qu'il nous suffise de donner quelques indications sur la marche à suivre. Nous remarquons que cette fonction est, au signe près, la dérivée $m^{\text{ième}}$ par rapport à s de

$$\frac{A + B \sin z}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s}.$$

La détermination de la valeur asymptotique de la meilleure approximation de cette fonction dépend du calcul de l'intégrale (6) du n° 94 au lieu de celui de l'intégrale (5). De même que (6) se déduit de (5) par dérivation, de même cette valeur asymptotique se déduit par dérivation de la valeur de ζ_n fournie par le théorème III (n° 99). De là, le théorème suivant :

Si m est un entier positif, la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction

$$(A + B \sin z) \frac{[\log(\operatorname{ch} b - \cos z)]^m}{(\operatorname{ch} b - \cos z)^s},$$

a pour valeur asymptotique

$$\zeta_n \sim \sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b} \frac{n^{s-1} (\log n)^m e^{-nb}}{\Gamma(s) \operatorname{sh} b^{s-1}}.$$

Cependant, si s est un entier nul ou négatif $-p$, la formule doit se modifier de la même manière que la formule (6), qui doit se remplacer par (6'). Le théorème est alors le suivant :

La meilleure approximation trigonométrique d'ordre n infiniment grand de la fonction

$$(A + B \sin z) (\operatorname{ch} b - \cos z)^p [\log(\operatorname{ch} b - \cos z)]^m$$

a pour valeur asymptotique

$$\zeta_n \sim \sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{sh}^2 b} p! m! (\log n)^{m-1} \operatorname{sh} b (n-1)^{p-1} n^{p-1}.$$

Comme cas particuliers intéressants, signalons les deux suivants :
Les meilleures approximations d'ordre n des fonctions

$$\log(\operatorname{ch} b - \cos z), \quad (\operatorname{ch} b - \cos z) \log(\operatorname{ch} b - \cos z).$$

ctivement pour valeurs asymptotiques :

$$\rho_n \sim \frac{e^{-nb}}{n \operatorname{sh} b}, \quad \rho_n \sim \frac{e^{-nb}}{n^2}.$$

approximation par polynome. — Les résultats précédents
riment, par les substitutions du n° 91, en d'autres équi-
relatifs à la meilleure approximation par un polynome de
dans l'intervalle $(-1, +1)$.

es cela, si a est une constante réelle > 1 , on connaît les
symptotiques de la meilleure approximation par un poly-
degré n des fonctions

$$\log(a-x), \quad (a-x)\log(a-x)$$

généralement, de la fonction (m entier, nul ou positif)

$$\frac{[\log(a-x)]^m}{(a-x)^s}.$$

ultat a été donné, pour $m = 0$ et $m = 1$, par M. Bernstein.
le géomètre n'a étudié que la représentation par polynome.
de la représentation trigonométrique nous a conduits à des
plus générales et plus élégantes; mais, pour les établir,
vions qu'une simple adaptation à faire des procédés analy-
maginés par M. Bernstein.



106. **Théorème III.** — Si une fonction périodique de x réel, $f(x)$, admet, quel que soit n entier, une représentation trigonométrique T_n , d'ordre n , avec une approximation

$$\varrho_n \leq h e^{-n\psi(n)},$$

où h est une constante et $\psi(n)$ une fonction non décroissante de n et infinie avec n ; alors $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan $z = x + yi$ et, quelque petit que soit ε positif donné, on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de y (qui dépend de ε),

$$(7) \quad |f(x + iy)| \leq e^{(1+\varepsilon)(1+y)} \quad (y > 0),$$

où φ est la fonction inverse de ψ .

D'abord $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan, en vertu du théorème IV du Chapitre VI (où l'on peut prendre h aussi grand que l'on veut).

Considérons le développement en série, pour x réel,

$$(8) \quad f(x) = T_2 + (T_3 - T_2) + \dots + (T_n - T_{n-1}) + \dots$$

L'expression trigonométrique d'ordre n

$$T_n - T_{n-1} = (f - T_{n-1}) - (f - T_n)$$

est de module inférieur à

$$2h e^{-n-1\psi(n-1)}$$

et, par conséquent, sa dérivée d'ordre k est de module inférieur à

$$2h n^k e^{-n-1\psi(n-1)},$$

Il s'ensuit que la série (8) peut être dérivée k fois terme à terme, car la série dérivée converge uniformément; et l'on en conclut

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &\leq 2h \sum_{n=2}^{\infty} n^k e^{-(n-1)\psi(n-1)} \\ &\leq 2h \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 dt (n-1)^k e^{-(n-2)\psi(n-2)-t} \end{aligned}$$

Substituons ces bornes dans le développement

$$f(x^{-1}y; i) = \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(x^{-1});$$

il vient

$$\begin{aligned} |f(x^{-1}y; i)| &\leq h \int_0^{+\infty} dt e^{-t\psi(t)} \sum_k \left| \frac{(-1)^k}{k!} y^k \right| \\ &\leq h \int_0^{+\infty} dt e^{-t\psi(t)} e^{ty} \\ &\leq h e^{y^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Faisons la décomposition en deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \psi(t) dt = \int_0^{1/y^2} e^{-t^2} \psi(t) dt + \int_{1/y^2}^{+\infty} e^{-t^2} \psi(t) dt$$

Comme φ est l'inverse de ψ , on a

$$\psi[\varphi(y^{-1}t)] = y^{-1}t;$$

la seconde intégrale est inférieure à

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2};$$

la première intégrale est inférieure à

$$\int_0^{y^{-1/2}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} e^{-y/4} \varphi(y/4),$$

il vient donc, quel que soit y positif,

$$|f(x^{-1}y; i)| \leq h e^{y^2} \left[\frac{1}{2} e^{y/4} \varphi(y/4) + \frac{1}{2} \right].$$

A partir d'une valeur suffisamment grande de y , on a, quelque petit que soit ε donné,

$$e^{y/4} \varphi(y/4) < \frac{1}{2} \varepsilon,$$

dès lors

$$|f(x^{-1}y; i)| < \frac{4h}{y} e^{y/2} \varphi(y/2 + 2).$$

La formule de l'énoncé est la conséquence immédiate de celle-ci. La comparaison des théorèmes précédents conduit à des conséquences intéressantes sur l'ordre de la meilleure approximation.

107. Théorème IV. — Soit $f(z)$ une fonction périodique, holomorphe dans tout le plan. Désignons par $\varphi(y)$ la plus petite fonction non décroissante de y positif qui satisfait à la condition

$$|f(x + yi)| \leq e^{\varphi(y)},$$

et supposons que $\varphi(y)$ croisse à l'infini avec y . Enfin soit ψ la fonction inverse de φ . Alors, quelque petit que soit ε positif donné, la meilleure approximation trigonometrique d'ordre n de $f(x)$ sur l'axe réel satisfait définitivement à la condition

$$\varrho_n \leq e^{(1+\varepsilon)n\psi(n^{1-\varepsilon})},$$

à partir d'une valeur suffisamment grande de n , tandis qu'elle ne vérifie jamais définitivement la condition

$$\varrho_n \leq e^{(1+\varepsilon)n\psi(n^{1+\varepsilon})}.$$

La première condition a été établie précédemment et rentre dans la formule (6). Nous allons montrer que la seconde est la conséquence du théorème précédent.

Si la dernière inégalité avait définitivement lieu, on pourrait assigner une constante h , telle que l'on ait, quel que soit y ,

$$\varrho_n \leq h e^{(1+\varepsilon)n\psi(n^{1+\varepsilon})}.$$

Mais la fonction inverse de

$$(1+\varepsilon)\psi(n^{1+\varepsilon}) = y$$

est

$$n = \varphi\left(\frac{y}{1+\varepsilon}\right) \rightarrow \infty.$$

On conclurait donc de l'inégalité précédente, par le théorème III, que l'on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de y ,

$$|f(x + yi)| \leq e^{y^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}.$$

Or ceci est contraire à la définition de φ , car φ pourrait être remplacé par une fonction plus petite $\varphi\left(\frac{y}{1+\varepsilon}\right)$.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
IRON. — Théorèmes de Weierstrass. Généralités.....	1
I. — Approximation par les séries de Fourier.....	10
II. — Approximation par les sommes de Fejér.....	30
III. — Méthode générale propre à abaisser la borne précédemment e à l'approximation.....	43
IV. — Théorèmes réciproques. Propriétés différentielles que sup i ordre donné d'approximation.....	53
V. — Approximation par polynomes; réduction à une approxima gonométrique.....	61
VI. — Polynome d'approximation minimum.....	71
VII. — Approximation trigonométrique minimum.....	93
VIII. — Fonctions analytiques présentant des singularités po	111
IX. — Fonctions analytiques présentant certaines singularités s (points critiques d'ordre κ).....	127
X. — Approximation trigonométrique des fonctions entières.....	146